Untersuchung einer linear-quadratischen Berührungstransformation.

Inaugural-Dissertation

der

Hohen philosophischen Fakultät der Universität Rostock

zur

Erlangung der Doktorwürde

ACAD.
LUGD.BAT.
BIBL.

vorgelegt von

Harry Wilson

aus **Zwickau.**

Weida i. Thür.
Druck von Thomas & Hubert
Spezialdruckerei für Dissertationen
1913.

Referent:

Herr Kais. Russ. Staatsrat Prof. Dr. Staude.

Meinen Eltern.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41553625_0005

Der Zweck der vorliegenden Arbeit ist, eine Ableitung der allgemeinen Eigenschaften und eine Klassifikation der Berührungstransformation $\Omega(xy|\xi\eta) = 0$ zu geben, die in einem der beiden Koordinatensysteme linear, in dem andern quadratisch ist. Dies soll so weit als möglich auf Grund der Eigenschaften einer Berührungstransformation, wie sie von Lie[1]) definiert worden ist, geschehen. Die Untersuchung führt einerseits auf Kegelschnittnetze und Kegelschnittreihen als Umhüllende von Kurven 4. Ordnung. Dabei zeigt es sich, daß die Eigenschaften dieser Kurven 4. Ordnung in enger Beziehung zu der Jakobischen und Singulären Kurve des Netzes stehen. Andererseits ergibt die Umkehrung Systeme von Geraden und Kegelschnitten, deren Untersuchung aber nur wenig Interessantes bietet.

1.

Bezeichnet man den Inbegriff eines Punktes und einer durch ihn gehenden Geraden als Linienelement, so kann man jeden Punkt mit seinen ∞^1 durch ihn gehenden Geraden als Verein von Linienelementen oder als Elementverein auffassen. Ebenso können wir jede Kurve mit ihren ∞^1 Punkten und deren zugehörige Tangenten als Elementverein ansehen. Andererseits darf aber auch jede Kurve als Punktort definiert werden. Dann ist jeder Kurvenpunkt ein Elementverein[2]).

Jede Berührungstransformation führt einen Elementverein in einen andern über. Berühren zwei Kurven einander, d. h. haben sie ein Linienelement gemeinsam, so gehen sie wieder in zwei sich berührende Kurven über, wobei die Berührungselemente einander entsprechen.

---

[1]) Lie-Scheffers, Geometrie der Berührungstransform., 1896, Bd. 1.

[2]) Lie-Scheffers, Geometrie der Berührungstransform. (1896), 1. Bd., S. 11–12, 38.

Unsere Untersuchung soll sich nun auf die Gleichung beziehen

(1) $\qquad \Omega(xy|\xi\eta) \equiv x\varphi_1(\xi|\eta) + y\cdot\varphi_2(\xi|\eta) + \varphi_3(\xi|\eta) = 0$

oder in homogenen Koordinaten

(1a) $\quad \Omega(xx|\xi\xi) \equiv x_1\varphi_1(\xi|\xi) + x_2\varphi_2(\xi|\xi) + x_3\varphi_3(\xi|\xi) = 0.$

Sind dann die $\varphi_i(\xi|\eta)$, wo $i = 1, 2, 3$ ist, quadratische Funktionen in $\xi|\eta$, so wird durch die Gleichung (1) und die aus ihr abgeleiteten Gleichungen

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x} + y'\frac{\partial\Omega}{\partial y} \equiv \varphi_1 + y'\cdot\varphi_2 = 0$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\xi} + \eta'\frac{\partial\Omega}{\partial\eta} \equiv x\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi} + \eta'\frac{\partial\varphi_1}{\partial\eta}\right) + y\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\xi} + \eta'\frac{\partial\varphi_2}{\partial\eta}\right) + \left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial\xi} + \eta'\frac{\partial\varphi_3}{\partial\eta}\right) = 0$$

eine Berührungstransformation bestimmt. Dabei ist $\Omega = 0$ nur der einen Bedingung unterworfen, daß die Determinante

$$(3)\quad D = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial\Omega}{\partial x} & \frac{\partial\Omega}{\partial y} \\ \frac{\partial\Omega}{\partial\xi} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial x\partial\xi} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial y\partial\xi} \\ \frac{\partial\Omega}{\partial\eta} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial x\partial\eta} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial y\partial\eta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & , & \varphi_1, & \varphi_2 \\ x\frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi} + y\cdot\frac{\partial\varphi_2}{\partial\xi} + \frac{\partial\varphi_3}{\partial\xi}, & & \frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi}, & \frac{\partial\varphi_2}{\partial\xi} \\ x\frac{\partial\varphi_1}{\partial\eta} + y\cdot\frac{\partial\varphi_2}{\partial\eta} + \frac{\partial\varphi_3}{\partial\eta}, & & \frac{\partial\varphi_1}{\partial\eta}, & \frac{\partial\varphi_2}{\partial\eta} \end{vmatrix}$$

infolge $\Omega = 0$ nicht verschwinden darf[1]). Aus den Gleichungen (1) und (2) ergibt sich hierauf

$$(4)\quad \begin{cases} x = \begin{vmatrix} \varphi_2 & \frac{\partial\varphi_2}{\partial\xi} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial\eta} \\ \varphi_3 & \frac{\partial\varphi_3}{\partial\xi} & \frac{\partial\varphi_3}{\partial\eta} \\ 0 & -\eta' & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \varphi_1 & \frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial\eta} \\ \varphi_2 & \frac{\partial\varphi_2}{\partial\xi} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial\eta} \\ 0 & -\eta' & 1 \end{vmatrix} \\ y = \begin{vmatrix} \varphi_3 & \frac{\partial\varphi_3}{\partial\xi} & \frac{\partial\varphi_3}{\partial\eta} \\ \varphi_1 & \frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial\eta} \\ 0 & -\eta' & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \varphi_1 & \frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial\eta} \\ \varphi_2 & \frac{\partial\varphi_2}{\partial\xi} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial\eta} \\ 0 & -\eta' & 1 \end{vmatrix} \end{cases}$$

[1]) Lie, Berührungstransf., S. 54.

$$y' = -\frac{\varphi_1}{\varphi_2}$$

die explizite Darstellung der ξ, η, η' führt zur Auflösung von Gleichungen 4. Grades. Da aber diese Umkehrung für das Folgende ohne Bedeutung ist, können wir sie hier unberücksichtigt lassen. Jedenfalls ersehen wir, daß einem Linienelement x, y, y' des einen Feldes vier Linienelemente ξ, η, η' des andern zugeordnet sind und einem Linienelement ξ, η, η' ein Linienelement x, y, y' entspricht. Also besteht zwischen beiden Feldern eine einvierdeutige Verwandtschaft.

Wir setzen nun getrennte Felder $\mathfrak{E}$ und E mit den Koordinatensystemen $x|y$ und $\xi|\eta$ voraus. Dann stellt Gleichung (1a) ein Kegelschnittnetz dar, dessen Grundkegelschnitte sind:

$$(5) \qquad \begin{cases} \varphi_1(\xi|\xi) \equiv \sum' a_{i\varkappa}\xi_i\xi_\varkappa = 0 \\ \varphi_2(\xi|\xi) \equiv \sum' b_{i\varkappa}\xi_i\xi_\varkappa = 0 \quad i,\varkappa = 1,2,3 \\ \varphi_3(\xi|\xi) \equiv \sum' c_{i\varkappa}\xi_i\xi_\varkappa = 0. \end{cases}$$

Angenommen wird dabei, daß die sechs Beziehungen:

$$(6) \qquad x_1 a_{i\varkappa} + x_2 b_{i\varkappa} + x_3 c_{i\varkappa} = 0 \quad i,\varkappa = 1,2,3$$

nicht alle zugleich erfüllt werden. Also muß wenigstens eine der Determinanten 3. Grades der Matrix:

$$(7) \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{22} & a_{33} & a_{12} & a_{13} & a_{23} \\ b_{11} & b_{22} & b_{33} & b_{12} & b_{13} & b_{23} \\ c_{11} & c_{22} & c_{33} & c_{12} & c_{13} & c_{23} \end{vmatrix}$$

von Null verschieden seien. Die sechs Gleichungen (6) stellen sechs Gerade dar, die wir als Grundgerade bezeichnen können. Werden alle dreireihigen Minoren der Matrix (7) identisch Null, so würde das heißen, daß alle sechs Geraden durch denselben Punkt gehen und damit überhaupt alle Geraden in $\mathfrak{E}$. Die Verwandtschaft würde entarten.

Jedem Punkt $(x_1|x_2|x_3)$ entspricht ein Kegelschnitt des Netzes in E. Den Punkten einer Geraden muß dann ein Kegelschnittbüschel mit vier festen Grundpunkten zugeordnet sein. Definieren wir nämlich die Gerade durch:

$$x_i = a_i + \lambda\beta_i \qquad i = 1,2,3$$

wo λ ein Parameter, α_i und β_i die Koordinaten zweier fester Punkte bedeuten, so erhalten wir durch Einsetzen in (1a):

$$\Omega \equiv \sum_1^3{}_i \alpha_i \varphi_i + \lambda \sum_1^3{}_i \beta_i \varphi_i$$
$$\equiv \Phi_2(\xi|\xi) + \lambda \Phi_1(\xi|\xi) = 0$$

und diese Gleichung stellt in der Tat ein Kegelschnittbüschel dar. Jedem Linienelement eines Punktes der Geraden, das mit der Geradenrichtung selbst zusammenfällt, müssen die vier Linienelemente entsprechen, deren Geraden die Tangenten an den jeweiligen Kegelschnitt in den vier Grundpunkten sind. Also gilt:

„Der Geraden als Elementverein entsprechen die vier Grundpunkte eines Kegelschnittbüschels. Die Geraden, die zu den Linienelementen in diesen gehören, bilden vier unter sich projektive Strahlenbüschel, indem diejenigen Linienelemente, die denselben Kegelschnitt berühren, entsprechende Linienelemente sind."

Die Gleichungen (2) können wir jetzt folgendermaßen deuten:

$$\varphi_1(\xi|\eta) + y'\varphi_2(\xi|\eta) = 0$$

stellt ein Büschel dar, das der unendlich fernen Geraden von $\mathfrak{E}$ zugeordnet ist. Jeder Kegelschnitt des Büschels schneidet in den Kegelschnitt $\Omega = 0$ die Punkte von vier Linienelementen ein, die dem Element x, y, y' entsprechen.

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \xi} + \eta' \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} = 0$$

dagegen bedeutet die Polare des unendlich fernen Punktes $\xi : \eta = 1 : \eta'$ in bezug auf den Kegelschnitt $\Omega = 0$.

Einer Geraden g sind als Elementverein vier Punkte zugeordnet. Dreht sich g um einen Punkt P, so entsprechen jeder neuen Lage von g wieder vier Punkte. Da alle diese Geraden durch einen Punkt gehen, so müssen die Punktquadrupel auf einem Kegelschnitt liegen, und zwar ist das der Kegelschnitt, der als Elementverein dem gemeinsamen Punkt P entspricht. Die Punktquadrupel bilden also eine

Involution vierter Ordnung[1]) auf dem Kegelschnitt. In einer solchen existieren sechs Doppelpunkte, d. h. es wird sechsmal vorkommen, daß zwei unserer vier Punkte zusammenfallen. Daher wird es auch in jedem Punkt von $\mathfrak{E}$ sechs solche Linienelemente geben, daß von ihren vier entsprechenden zwei zusammenfallen, während die beiden anderen getrennt bleiben.

Wir nehmen jetzt zwei sich schneidende Gerade in $\mathfrak{E}$ an, denen zwei Kegelschnittbüschel mit i. a. acht verschiedenen Grundpunkten entsprechen. Beide Gerade haben in ihrem Schnittpunkt einen Elementverein gemeinsam und daher müssen auch die beiden Kegelschnittbüschel einen gemeinsamen Kegelschnitt besitzen, der durch die acht Grundpunkte geht.

Die Punkte der beiden Geraden seien definiert durch

$$(8) \qquad \begin{cases} x_i = a_i + \lambda \beta_i \\ x_i = a_i' + \lambda a_i \end{cases} \qquad i = 1, 2, 3$$

wo a_i die Koordinaten des Schnittpunktes $P \equiv Q'$ von g und g' bedeuten und a_i', β_i die Koordinaten zweier Punkte P' und Q auf g' und g sind. Die Verbindungsgeraden entsprechenden Punkte erzeugen eine Kurve zweiter Klasse, die in P' und Q die Geraden g' und g berührt. Durch Einsetzen von (8) in (1a) erhalten wir zwei Kegelschnittbüschel:

$$(9) \qquad \begin{cases} \sum_1^3{}_i \alpha_i \varphi_i + \lambda \sum_1^3{}_i \beta_i \varphi_i \equiv \Phi_2 + \lambda \Phi_1 = 0 \\ \sum_1^3{}_i \alpha_i' \varphi_i + \lambda \sum_1^3{}_i \alpha_i \varphi_i \equiv \Phi_3 + \lambda \Phi_2 = 0. \end{cases}$$

Bilden wir dann weiter:

$$(\Phi_3 + \lambda \Phi_2) + \varkappa (\Phi_2 + \lambda \Phi_1) = 0$$

oder:

$$(10) \qquad \varkappa \lambda \Phi_1 + (\varkappa + \lambda) \Phi_2 + \Phi_3 = 0,$$

so ergibt sich ein Kegelschnittnetz. Setzen wir nun $\varkappa = \lambda$, so folgt

$$(11) \qquad \lambda^2 \Phi_1 + 2 \lambda \Phi_2 + \Phi_3 = 0.$$

[1]) Encycl. der Math. Wissensch., Bd. III, C. 4, S. 408 und S. 409, Anm. 295.

Für variable λ stellt dies eine Reihe von ∞^1 Kegelschnitten dar, die eine Kurve vierter Ordnung umhüllen, deren Gleichung wir durch Elimination von λ aus (9) erhalten:

$$\Phi_1 \cdot \Phi_3 - \Phi_2^2 = 0. \tag{12}$$

Aus dieser Gleichung geht unmittelbar hervor, daß die Kurve vierter Ordnung von den Kegelschnitten $\Phi_1 = 0$ und $\Phi_3 = 0$ in deren Schnittpunkten mit $\Phi_2 = 0$ berührt wird. Dasselbe folgt aus Gleichung (11), wenn wir $\lambda = 0$ bez. $\lambda = \infty$ setzen. Also gehören die den Punkten P und Q entsprechenden Kegelschnitte zu dem System berührender Kegelschnitte, $\Phi_2 = 0$ dagegen nicht.

Die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte in Gleichung (8) umhüllen einen Kegelschnitt. Diesen Geraden entsprechen wieder Kegelschnittbüschel, die ein Netz bilden, und dem umhüllten Kegelschnitt in $\mathfrak{S}$ ist als Elementverein die Kurve vierter Ordnung zugeordnet.

Den Punkten eines Kegelschnittes in $\mathfrak{S}$ werden aber Kegelschnitte in E zugeordnet sein. Da zu jedem Punkt ein Berührungselement an den Kegelschnitt in $\mathfrak{S}$ gehört, so müssen die entsprechenden Kegelschnitte vier Linienelemente besitzen, die die Kurve vierter Ordnung berühren. Es gibt demnach in dem Netz ein System von Kegelschnitten, welche die Kurve vierter Ordnung in vier Punkten berühren. Zugleich fällt aber das Berührungselement in $\mathfrak{S}$ mit der Richtung der zugehörigen Tangente an den Kegelschnitt zusammen, also liegen die vier entsprechenden Elemente in den Grundpunkten des betreffenden Kegelschnittbüschels. Daraus folgt:

„Die Kurve vierter Ordnung ist die Enveloppe eines Systems sie vierpunktig berührender Kegelschnitte des Netzes und der geometrische Ort der Grundpunkte der ∞^1 Kegelschnittbüschel."

Jeder den Kegelschnitt einhüllenden Geraden entspricht ein Kegelschnittbüschel. Es ist aber jeder Punkt einer Einhüllenden zugleich Schnittpunkt mit einer andern Einhüllenden, also wird jeder Punkt zwei Büscheln angehören und folglich

durch acht Punkte gehen. Eine Ausnahme bilden nur die Berührungspunkte der Geraden mit dem Kegelschnitt in $\mathfrak{E}$. Diese gehören immer bloß einer Geraden an, also die zugeordneten Kegelschnitte auch nur einem Büschel. Es ergibt sich das Resultat:

„Ein Kegelschnittnetz steht zu jeder zugehörigen Kurve vierter Ordnung in der Beziehung, daß alle Kegelschnitte des Netzes zwei Büscheln angehören müssen, deren Grundpunkte auf der Kurve vierter Ordnung liegen, mit Ausnahme des Kegelschnittes, dessen Tangenten in den Grundpunkten zugleich Tangenten an die Kurve vierter Ordnung sind."

Und weiter folgt:

„Sollen zwei Kegelschnitte, die die Kurve vierter Ordnung in acht Punkten berühren, zur selben Reihe gehören, so müssen ihre Berührungspunkte auf einem anderen Kegelschnitt liegen, der zum Netz gehört."

Es gibt aber 63 quadratische Kegelschnittreihen[1]), deren Umhüllende die Kurve vierter Ordnung ist. Eine von diesen Reihen wird die von uns in Gleichung (11) gefundene sein.

2.

Bei Umkehrung der Verwandtschaft entspricht jedem Punkte

$$\xi_i = \alpha_i + \varkappa\beta_i \qquad i = 1, 2, 3$$

eine Gerade in $\mathfrak{E}$. Setzen wir diesen Wert nämlich in (1a) ein, so gilt:

$$\sum_1^3{}_i x_i [\varphi_i(\alpha|\alpha) + 2\varkappa\varphi_i(\alpha|\beta) + \varkappa^2\varphi_i(\beta|\beta)] = 0$$

oder

$$\sum_1^3{}_i x_i u_i = 0.$$

Infolge der Einvierdeutigkeit wird es aber noch drei andere Punkte in E geben, denen dieselbe Gerade entspricht.

Durchläuft ξ_i eine Gerade, d. h. ist $\varkappa$ variabel, so umhüllen die entsprechenden Geraden in $\mathfrak{E}$ eine Kurve zweiter Klasse, wie sich analytisch sofort zeigen läßt.

[1]) Encycl. III C_5 S. 530.

Wir schreiben

$$\sum x_i u_i = u_1(x) + 2\varkappa u_2(x) + \varkappa^2 u_3(x) = 0,$$

wo

$$u_1(x) = \sum_1^3 x_i \varphi_i(a|a)$$

ist und entsprechend $u_2(x)$ und $u_3(x)$. Daraus folgt aber:

$$[u_1(x) + \varkappa u_2(x)] + \varkappa [u_2(x) + \varkappa u_3(x)] = 0 \tag{13}$$

oder

$$u(x) + \varkappa v(x) = 0.$$

Dabei ist

$$\begin{cases} u(x) = u_1(x) + \varkappa u_2(x) = 0 \\ v(x) = u_2(x) + \varkappa u_3(x) = 0. \end{cases} \tag{14}$$

$u(x)$ und $v(x)$ stellen zwei projektive Strahlenbüschel dar, deren entsprechende Geraden sich in Punkten eines Kegelschnittes schneiden. Durch Elimination von $\varkappa$ aus Gleichung (14) folgt die Gleichung des Kegelschnittes selbst:

$$u_1(x) \cdot u_3(x) - u_2^2(x) = 0, \tag{15}$$

während Gleichung (12) die Tangenten an den Kegelschnitt im Schnittpunkt der beiden entsprechenden Geraden darstellt. Daraus folgt aber, daß $u_1(x) = 0$ und $u_3(x) = 0$ in den Schnittpunkten mit $u_2(x) = 0$ Tangenten an den Kegelschnitt sein müssen. Also können wir sagen:

Einer Geraden γ soll ein Kegelschnitt p^2 zugeordnet sein. p^2 entspricht aber wieder eine Kurve vierter Ordnung, und daher wird γ einen Teil dieser Kurve vierter Ordnung bilden. Somit muß einer von den vier Grundpunkten der Büschel des Netzes immer auf dieser Geraden liegen und also auch die Gerade von allen Kegelschnitten des Systems der Berührungskegelschnitte an die Kurve vierter Ordnung berührt werden. Demnach gilt:

„Haben zwei Berührungskegelschnitte eine gemeinsame Tangente in zwei Grundpunkten, so müssen alle Berührungskegelschnitte diese Gerade berühren, und die Tangente gehört dann zur Kurve vierter Ordnung."

Liegen nun die drei anderen Grundpunkte auf einer wirklichen Kurve dritter Ordnung oder zerfällt diese noch weiter?

Vorgelegt sei ein Kegelschnitt $\Phi_2 = 0$ und eine ihn schneidende Gerade γ in E. Dann gibt es in jedem der beiden Schnittpunkte eine Schar von unendlich vielen Kegelschnitten, die die Gerade γ berühren. Wir greifen aus jeder Schar einen ganz beliebigen Kegelschnitt heraus, z. B. $\Phi_1 = 0$, $\Phi_3 = 0$. Diese bestimmen mit $\Phi_2 = 0$ zwei Kegelschnittbüschel und somit auch ein Netz; dabei gehören $\Phi_1 = 0$ und $\Phi_3 = 0$ zugleich zum System der Berührungskegelschnitte an eine Kurve vierter Ordnung, deren einer Teil die Gerade γ ist. Infolge der allgemeinen Lage von $\Phi_1 = 0$ und $\Phi_3 = 0$ wird es i. a. nicht der Fall sein, daß noch zwei andere Grundpunkte der beiden Büschel auf einer Geraden liegen, die zugleich Tangente an $\Phi_1 = 0$ und $\Phi_3 = 0$ ist, also erst recht nicht drei oder vier Gerade, die in den Grundpunkten die Kegelschnitte tangieren. Es folgt daher:

„Haben die beiden Grund- und Berührungskegelschnitte $\Phi_1 = 0$, $\Phi_3 = 0$ in einem ihrer Schnittpunkte mit $\Phi_2 = 0$ eine gemeinsame Tangente, so liegt einer der vier Grundpunkte der ∞^1 Büschel immer auf dieser Geraden γ, und die Kurve vierter Ordnung zerfällt in diese Gerade und eine Kurve dritter Ordnung ohne singuläre Punkte. Diese Kurve dritter Ordnung wird dann von den Berührungskegelschnitten in drei Punkten berührt."

Diesen Satz können wir auch so ausdrücken:

„Läuft ein Punkt in E auf einer Geraden, so beschreiben die drei zugehörigen Punkte eine Kurve dritter Ordnung."

Der Satz gilt nicht mehr, sobald die Gerade in E zu einem zerfallenden Kegelschnitt des Netzes gehört, da die vier Grundpunkte dann auf zwei Geraden liegen, die zusammen den Kegelschnitt des Büschels bilden.

Angenommen $\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 = 0$ und $\Phi_2 = 0$, $\Phi_3 = 0$ bestimmen zwei Kegelschnittbüschel, die zwei Geraden g und g' entsprechen. $\Phi_1 = 0$, $\Phi_3 = 0$ sollen Berührungskegelschnitte einer Kurve vierter Ordnung sein, die in eine Gerade γ und

eine Kurve dritter Ordnung zerfällt. Es wird also einer der Grundpunkte von beiden Büscheln auf der Geraden γ liegen, die Tangente an $\Phi_1 = 0$ und $\Phi_3 = 0$ ist. Die vier Grundpunkte des einen Büschels kann man mit denen des andern auf 16 verschiedene Weisen verbinden. Diese Geraden können wir aber jedesmal als Tangenten an zwei beliebige Kegelschnitte $\Phi_1' = 0$, $\Phi_3' = 0$ der beiden Büschel auffassen. Daher ist es möglich, aus diesen beiden Kegelschnitten und dem unverändert fest gegebenen Kegelschnitt $\Phi_2 = 0$ zwei zueinander projektive Büschel herzustellen, die wieder eine zerfallende Kurve vierter Ordnung erzeugen. Diese ist dann abermals einem Kegelschnitt zugeordnet, der die Geraden g und g' in Punkten berührt, denen die neuen Kegelschnitte $\Phi_1' = 0$, $\Phi_3' = 0$ entsprechen. Man kann also sagen:

„Zwischen zwei Kegelschnittbüscheln kann man i. a. 16mal eine Projektivität derart herstellen, daß durch sie eine Kurve vierter Ordnung erzeugt wird, die in eine Gerade und eine Kurve dritter Ordnung zerfällt, die keine Singularität besitzt."

3.

Jedes nicht entartete Kegelschnittbüschel hat i. a. drei zerfallende Kegelschnitte. Da ein Netz aus ∞^1 Kegelschnittbüscheln besteht, so gibt es auch ∞^1 zerfallende Kegelschnitte in ihm. Ein Kegelschnitt zerfällt dann und nur dann, wenn seine Determinante verschwindet. Wie aus (1a) folgt, muß in diesem Fall sein:

$$(16) \qquad \Delta \equiv \begin{vmatrix} (11) & (12) & (13) \\ (12) & (22) & (23) \\ (13) & (23) & (33) \end{vmatrix} = 0,$$

wobei gesetzt ist:

$$(11) = a_{11}x_1 + b_{11}x_2 + c_{11}x_3$$

und entsprechend die anderen Ausdrücke.

Da nun $\Delta = 0$ eine Gleichung dritten Grades in x liefert, liegen alle Punkte x, deren zugeordnete Kegelschnitte zerfallen, auf einer Kurve dritter Ordnung in E. Wir wollen sie „die Singuläre Kurve" nennen und mit S^3 bezeichnen.

Erfüllt x die Gleichung $\Delta = 0$, so ist der Doppelpunkt des zerfallenden Kegelschnittes in E die gemeinsame Lösung der drei Gleichungen:

$$\text{(17)} \qquad \begin{aligned} \sum_1^3{}_i\, x_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi_1} &= 0 \\ \sum_1^3{}_i\, x_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi_2} &= 0 \\ \sum_1^3{}_i\, x_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi_3} &= 0. \end{aligned}$$

Sollen aber umgekehrt für einen Punkt ξ diese Gleichungen eine gemeinsame Lösung in x haben, so muß gelten:

$$\text{(18)} \qquad J^3 \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_3} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi_3} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial \xi_3} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + a_{13}\xi_3, & b_{11}\xi_1 + \ldots + \ldots, & c_{11}\xi_1 + \ldots + \ldots \\ a_{12}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + a_{23}\xi_3, & b_{12}\xi_1 + \ldots + \ldots, & c_{12}\xi_1 + \ldots + \ldots \\ a_{13}\xi_1 + a_{23}\xi_2 + a_{33}\xi_3, & b_{13}\xi_1 + \ldots + \ldots, & c_{13}\xi_1 + \ldots + \ldots \end{vmatrix} = 0.$$

Das ist aber die Gleichung der Jakobischen Kurve J^3 für ein Kegelschnittnetz.

„Die Jakobische oder Hessesche Kurve ist der geometrische Ort der Doppelpunkte der im Netz enthaltenen zerfallenden Kegelschnitte. Zu jedem Punkte der singulären Kurve gehört eindeutig ein Punkt der Jakobischen Kurve, der der Doppelpunkt des entsprechenden Kegelschnitts ist.“

Die zerfallenden Kegelschnitte in E umhüllen eine Kurve dritter Klasse, die Cayleysche Kurve $\mathfrak{C}^3$.[1])

[1]) Über die Bestimmung der $\mathfrak{C}^3$ vergl. Gundelfinger, Vorles. aus der analyt. Geom. der Kegelschnitte (1895), S. 222–225.

Haben zwei Kegelschnittbüschel einen oder mehrere gemeinsame Grundpunkte, so haben ihn alle Kegelschnittbüschel des Netzes. Ein solcher Punkt, der allen Netzkegelschnitten gemeinsam ist, heißt ein „Fundamentalpunkt“ des Netzes. Dieses kann höchstens drei Fundamentalpunkte besitzen; denn durch vier lassen sich nur noch ∞^1 Kegelschnitte legen. Für einen solchen Fundamentalpunkt versagt die Definition der Berührungstransformation.

Nach (3) darf die Determinante D für $\Omega = 0$ nicht verschwinden, wenn die Berührungstransformation gelten soll. Diese Determinante können wir folgendermaßen umformen.

$$D = \begin{vmatrix} \varphi_1, & \varphi_2, & 0 \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi}, & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi}, & x\frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi} + y\frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta}, & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \eta}, & x\frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta} + y\frac{\partial \varphi_2}{\partial \eta} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial \eta} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \varphi_1, & \varphi_2, & -(x\varphi_1 + y\varphi_2) \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi}, & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi}, & \left(x\cdot\frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi} + y\frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial \xi}\right) - \left(x\frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi} + y\frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi}\right) \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta}, & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \eta}, & \left(x\cdot\frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta} + y\frac{\partial \varphi_2}{\partial \eta} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial \eta}\right) - \left(x\frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta} + y\frac{\partial \varphi_2}{\partial \eta}\right) \end{vmatrix}$$

$$(19) \qquad D = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \eta} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial \eta} \end{vmatrix}.$$

Diese Determinante verschwindet für einen Fundamentalpunkt, denn für diesen wird:

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \varphi_3 = 0.$$

Ein Fundamentalpunkt gehört stets zur Kurve vierter Ordnung. In ihm wird die Tangente unbestimmt, da auch alle ∞^1 Berührungskegelschnitte durch ihn gehen, mit immer verschiedenen Tangentenrichtungen. Der Fundamentalpunkt ist demnach ein Doppelpunkt der Kurve vierter Ordnung.

Die Umkehrung dieses Satzes, daß jeder Doppelpunkt der Kurve vierter Ordnung auch ein Fundamentalpunkt des Netzes ist, gilt nicht, wie wir später sehen werden. Wir wollen diese Punkte „Doppelpunkte erster Art“ nennen.

4.

Das Netz besitze zunächst einen Fundamentalpunkt. Dieser kann bloß reell sein, wenn die durch ihn gehenden Kegelschnitte reell sind. Die Verwandtschaft ist jetzt nur noch ein-dreideutig. Einem Punkt entspricht noch immer ein Kegelschnitt, aber eines der vier entsprechenden Linienelemente fällt stets in den Fundamentalpunkt. Drehen wir also eine Gerade um einen Punkt in $\mathfrak{S}$, so werden nur drei Punkte einen Kegelschnitt durchlaufen. Die Involution auf dem Kegelschnitt ist also von der dritten Ordnung, und es gibt vier Koinzidenzpunkte. Die Kurve vierter Ordnung besitzt den Fundamentalpunkt als Doppelpunkt, und ihre Berührungskegelschnitte werden sie außerdem in drei Punkten berühren.

Um die Netzgleichung aufzustellen, wählen wir die Tangenten in dem Fundamentalpunkt an zwei Kegelschnitte des Netzes $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$ als die Seiten $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0$ und die Verbindungslinie der Schnittpunkte von $\xi_1 = 0$ mit $\varphi_2 = 0$ und von $\xi_2 = 0$ mit $\varphi_1 = 0$ als die Seite $\xi_3 = 0$ des Koordinatendreiecks. Ist dann noch $\xi_1 \cdot \xi_2 = 0$ ein zerfallender Kegelschnitt, so lautet die Netzgleichung:

$$x_1(a_{22}\xi_2^2 + 2\,a_{13}\xi_1\xi_3) + x_2(b_{11}\xi_1^2 + 2\,b_{23}\xi_2\xi_3) + x_3 \cdot 2\,\xi_1\xi_2 = 0^{1}).$$

Die Jakobische Kurve nimmt dann die Form an:

$$J^3 \equiv a_{13}b_{11}\xi_1^3 + a_{22}b_{23}\xi_2^3 - 2\,a_{13}b_{23}\xi_1\xi_2\xi_3 = 0.$$

Sie hat also den Fundamentalpunkt als Doppelpunkt, und ihre Doppelpunktstangenten sind $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0$.

Die Gleichung der Singulären Kurve ist:

$$\Delta \equiv a_{13}^2 a_{22} x_1^3 + b_{11} b_{23}^2 x_3^3 - 2\,a_{13}b_{23}x_1x_2x_3 = 0.$$

[1]) Gundelfinger, Vorles. S. 384.

Da sie sich nur in den Konstanten von der Jakobischen Kurve unterscheidet, so hat sie dieselben Eigenschaften wie diese. Sie besitzt einen Doppelpunkt in $x_1 = x_2 = 0$ und ihre Doppelpunktstangenten sind $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. Dabei entsprechen dem Doppelpunkt $x_1 = x_2 = 0$ die Doppelpunktstangenten der Jakobischen Kurve als zerfallender Kegelschnitt.

Die Cayleysche Kurve zerfällt in den Doppelpunkt und eine Kurve zweiter Klasse[1]).

Hat das Netz zwei Fundamentalpunkte, so müssen beide reell oder beide konjugiert imaginär sein, wenn das Netz reell sein soll. Wir haben es jetzt mit einer ein-zweideutigen Verwandtschaft zu tun. Von den vier Linienelementen, die einem Element in $\mathfrak{E}$ entsprachen, sind nur noch zwei frei, während die beiden andern in die Fundamentalpunkte fallen. Die Involution auf einem Kegelschnitt ist von der zweiten Ordnung und hat zwei Doppelpunkte. Die Kurve vierter Ordnung wird von den Berührungskegelschnitten in zwei Punkten berührt, während die beiden andern mit den Doppelpunkten identisch sind. Gehen alle Kegelschnitte durch zwei feste Punkte, so müssen sie die Verbindungslinie beider als gemeinsame Sehne besitzen. Diese Sehne gehört dann zu einer Reihe von zerfallenden Kegelschnitten. Sie ist immer reell, auch wenn die Fundamentalpunkte konjugiert imaginär sind.

Die Netzgleichung kann in der Form aufgestellt werden:

$$x_1(a_{11}\xi_1^2 + a_{22}\xi_2^2 + a_{33}\xi_3^2 + 2\,a_{12}\xi_1\xi_2 + 2\,a_{13}\xi_1\xi_3 + 2\,a_{23}\xi_2\xi_3)$$
$$+ x_2(2\,b_{13}\xi_1 + 2\,b_{23}\xi_2 + b_{33}\xi_3)\xi_3 + x_3(2\,c_{13}\xi_1 + 2\,c_{23}\xi_2 + c_{33}\xi_3)\xi_3 = 0.$$

Ein Teil der zerfallenden Kegelschnitte besteht aus der gemeinsamen Sehne und einem Strahlenbüschel mit dem Scheitel 0, während der andere Teil dieser Kegelschnitte durch die Fundamentalpunkte geht und die Doppelpunkte auf einem Kegelschnitt liegen, der einen Teil der Jakobischen Kurve bildet. Diese selbst zerfällt in die Sehne $\xi_3 = 0$ und einen Kegelschnitt, der auch $\xi_3 = 0$ als Sehne besitzt[3]). Die $\mathfrak{C}^3$ zerfällt in die

[1]) Gundelfinger, Vorles. S. 384—385.
[2]) Ebenda, S. 385.
[3]) Ebenda, S. 385—386.

zwei Fundamentalpunkte und den Scheitel 0[1]). Die Singuläre Kurve besteht gleichfalls aus einer Geraden $x_1 = 0$ und einem Kegelschnitt. Die Zuordnung ist dann so, daß den Punkten der Geraden $x_1 = 0$, wie aus der Netzgleichung hervorgeht, die Kegelschnitte entsprechen, deren einer Teil $\xi_3 = 0$ ist.

Jetzt ist es auch möglich, daß das Netz aus lauter Kreisen besteht, deren Fundamentalpunkte dann die imaginären Kreispunkte sind. Die Jakobische Kurve besteht aus der unendlich fernen Geraden und einem Kreis, der alle Netzkurven rechtwinklig schneidet, dem sogenannten Orthogonalkreis des Netzes[2]). Die $\mathfrak{C}^3$ zerfällt in das imaginäre Kreispunktepaar und den gemeinsamen Potenzmittelpunkt[3]). Die S^3 wird von derselben Form sein wie die J^3.

Besitzt das reelle Netz drei Fundamentalpunkte, so muß immer einer reell sein, während die andern reell oder konjugiert imaginär sein können. Damit ist die Beziehung ein-eindeutig geworden. Jedem Element entspricht nur noch ein freies Element. Die Kurve vierter Ordnung hat drei Doppelpunkte und wird von den Kegelschnitten außerdem bloß noch in einem Punkte berührt.

Den reellen Punkt können wir immer zu einem Eckpunkt $\xi_1 = \xi_2 = 0$ unseres Koordinatensystems machen. $\xi_3 = 0$ ist die Verbindungsgerade der beiden andern Fundamentalpunkte. Die Netzgleichung lautet:

$$x_1 \cdot 2\,\xi_2\xi_3 + x_1 \cdot 2\,\xi_1\xi_3 + x_3(c_{11}\xi_1^2 + 2\,c_{12}\xi_1\xi_2 + c_{22}\xi_2^2) = 0.$$

Dann wird: $$S^3 \equiv (c_{11}x_1^2 + c_{22}x_2^2 - 2\,c_{12}x_1x_2)x_3 = 0.$$

Da auch $c_{11}x_1^2 + c_{22}x_2^2 - 2\,c_{12}x_1x_2 = 0$ ein zerfallender Kegelschnitt ist, so zerfällt die Singuläre Kurve in drei Gerade. Die Jakobische Kurve besteht aus den drei Verbindungslinien der Fundamentalpunkte und die Cayleysche aus den drei Punkten selbst[4]).

[1]) Gundelfinger, Vorles. S. 386.
[2]) Ebenda, S. 389.
[3]) Ebenda, S. 389.
[4]) Ebenda, S. 386—387.

Zusammenfassend kann man also sagen:

„Besitzt das Netz einen Fundamentalpunkt, so hat die Singuläre Kurve, die Jakobische Kurve und die Kurve vierter Ordnung einen Doppelpunkt, die Cayleysche Kurve aber einen isolierten Punkt."

5.

Es gibt nun folgenden Satz:

„Jedes Kegelschnittnetz, das keine Doppelgerade aufweist, kann als Netz der Polarkegelschnitte einer ganz bestimmten Kurve dritter Ordnung angesehen werden[1])."

Dann müssen sich also immer drei Kegelschnitte, die nicht in einem Büschel liegen, so bestimmen lassen, daß sie die ersten Differentialquotienten einer Kurve dritter Ordnung sind.

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \varphi_3 = 0$$

seien drei solche Kegelschnitte. Ist dann die Kurve dritter Ordnung

$$\Sigma a_{i\varkappa\lambda}\,\xi_i\,\xi_\varkappa\,\xi_\lambda \equiv \Phi(\xi|\xi|\xi) = 0 \quad i, \varkappa, \lambda = 1, 2, 3,$$

so muß gelten

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_1} \equiv \varphi_1; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_2} \equiv \varphi_2; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_3} \equiv \varphi_3$$

so daß die Gleichung der Kurve dritter Ordnung auch lautet:

(20) $$\Phi \equiv \xi_1\varphi_1 + \xi_2\varphi_2 + \xi_3\varphi_3 = 0.$$

Sind nun η_i die Koordinaten beliebiger Punkte der Ebene, so stellt

(21) $$\eta_1\varphi_1 + \eta_2\varphi_2 + \eta_3\varphi_3 = 0$$

ein Netz von konischen Polaren in bezug auf die Kurve dritter Ordnung dar. Bei zusammenfallenden Feldern wäre also

$$x_i = \eta_i \qquad i = 1, 2, 3.$$

Daraus folgt, daß man zwischen den Punkten der Ebenen $\mathfrak{E}$ und E eine Kollineation derart herstellen kann, daß die Punkte der Ebene E noch unter Anwendung einer Polarbeziehung in das Netz der konischen Polaren einer Kurve dritter Ordnung übergehen.

---

[1]) Encycl., III C_5, S. 471.

Wir können dann auch Eigenschaften, die wir bei zusammenfallenden Feldern finden, unmittelbar auf getrennte Felder übertragen, wenn sie sich nur auf die entsprechenden Punkte und Kurven beziehen. Denn es ist ja ebenso umgekehrt möglich, durch Hinzufügen einer Kollineation die Punkte von E in die von $\mathfrak{E}$ zu transformieren.

Da es nur eine Jakobische Kurve für ein Kegelschnittnetz gibt, so wird diese durch eine solche Transformation nicht geändert. Sie bleibt also dieselbe auch für die neuen Grundkegelschnitte $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, $\varphi_3 = 0$, die natürlich im Netz schon enthalten waren. Dann nimmt aber die Singuläre Kurve dieselbe Gleichungsform in x an, wie die Jakobische Kurve in ξ-Koordinaten. Bei zusammenfallenden Feldern werden beide identisch. Es besteht aber der Satz[1]):

„Jeder Punkt η, dessen Polaren in bezug auf drei gegebene Kurven zweiter Ordnung sich in einem Punkt ξ schneiden, liegt zugleich mit diesem Punkt auf der Hesseschen Kurve $\Sigma \pm \varphi_{11}\varphi_{22}\varphi_{33} = 0$, wobei $\varphi_{i\varkappa} = \frac{1}{2}\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_\varkappa}$ $(i, \varkappa = 1, 2, 3)$ ist."

Ebenso gilt die Umkehrung. Solche Punkte η und ξ nennt man konjugierte oder harmonische Pole der Hesseschen Kurve[2]). In unserm Fall, wo die drei Kegelschnitte φ_1, φ_2, φ_3 außerdem erste Differentialquotienten einer Kurve dritter Ordnung sind, haben diese Punkte noch die besondere Eigenschaft, daß in einen solchen Punkt ξ die Spitze des zerfallenden Kegelschnitts fällt, der dem Punkt η zugeordnet ist[3]). Wir können also sagen:

„Die beiden Kurven S^3 und J^3 fallen so zusammen, daß die Punkte der einen die konjugierten Pole zu denen der andern sind."

Wir nehmen jetzt zusammenfallende Ebenen an und beziehen die x und ξ auf dasselbe Koordinatendreieck. Sind dann φ_1, φ_2, φ_3 wieder die ersten Differentialquotienten einer

[1]) Gundelfinger, Vorl. S. 218—219.
[2]) Ebenda S. 219.
[3]) Durège, Die ebenen Kurven 3. Ordnung (1871); S. 240, Art. 438.

Kurve dritter Ordnung $\Phi = 0$, so bilden $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, $\varphi_3 = 0$ diejenigen konischen Polaren dieser Kurve, welche den Ecken des Fundamentaldreiecks angehören. Die konische Polare jedes auf der Kurve dritter Ordnung selbst liegenden Punktes ist ein Kegelschnitt, der in diesem Punkt mit der Kurve dritter Ordnung eine gemeinsame Tangente hat[1]). Läuft also ein Punkt auf der Kurve dritter Ordnung, so sind seine konischen Polaren die in diesem Punkt berührenden Kegelschnitte.

Zwischen den Koeffizienten der drei Grundkegelschnitte müssen jetzt folgende Beziehungen bestehen, die sich sofort aus der Netzgleichung (21) und der Kurve $\Phi = 0$ herleiten lassen:

$$a_{11},\ b_{22},\ c_{33} \text{ sind unbestimmt}$$
$$a_{22} = b_{12} \quad a_{12} = b_{11} \quad a_{23} = b_{13} = c_{12} \quad b_{23} = c_{22}$$
$$a_{33} = c_{13} \quad a_{13} = c_{11} \quad b_{33} = c_{23}.$$

Setzt man diese Werte in Gleichung (16) ein, so ergibt sich, daß die Singuläre Kurve wirklich identisch mit der Jakobischen Kurve wird. Also gilt schließlich:

„Die konische Polare jedes auf der Hessiane liegenden Punktes, und nur dieses, besteht aus einem Geradenpaar, welches das polare Geradenpaar genannt wird[2])." Die Jakobische Kurve ist zugleich auch die Hessiane der Kurve dritter Ordnung und hat als solche die Form

$$\Sigma' \pm \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi_1^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi_2^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi_3^2} = 0.$$

Die konischen Polaren aller auf einer Geraden liegenden Punkte bilden ein Kegelschnittbüschel. Der Geraden selbst entsprechen die vier Grundpunkte des Büschels, da es vier Punkte gibt, die eine Gerade gleichzeitig zur geraden Polaren haben.[3])

Nimmt man umgekehrt die ξ fest an und die x veränderlich, so erhalten wir die gerade Polare des Punktes ξ. Lassen wir ξ auf einer Geraden laufen, so umhüllen die ent-

[1]) Durège, K. 3. O., S. 162, Art. 269.
[2]) Ebenda S. 162, Art. 268.
[3]) Ebenda S. 165, Art. 285.

sprechenden geraden Polaren einen Kegelschnitt, die Polokonik der Geraden[1]).

Bei einem Netz mit einem Fundamentalpunkt hat die Jakobische Kurve einen Doppelpunkt, dann hat ihn aber auch die Kurve dritter Ordnung, und beide Kurven haben das Tangentenpaar im Doppelpunkt gemein. Im Falle der zwei Fundamentalpunkte besitzt die Kurve dritter Ordnung diese gleichfalls als Doppelpunkte. Sie zerfällt in die gemeinsame Sehne der Netzkegelschnitte und in einen Kegelschnitt. Bei drei Fundamentalpunkten besteht die Kurve dritter Ordnung aus den drei Verbindungsgeraden der Fundamentalpunkte, ist also identisch mit ihrer Jakobischen Kurve.

6.

g sei eine Gerade in $\mathfrak{S}$, der in E ein Kegelschnittbüschel mit vier Grundpunkten entspricht. Sie hat drei Schnittpunkte

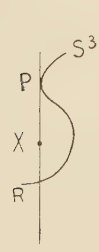

Fig. 1a.

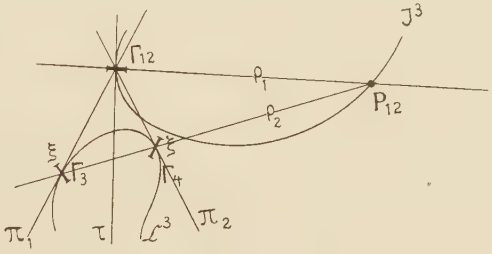

Fig. 1b.

mit der Singulären Kurve, denen die drei zerfallenden Kegelschnitte des Büschels zugeordnet sind. Wird nun g Tangente an die Singuläre Kurve, so fallen zwei Schnittpunkte im Berührungspunkt zusammen, aber auch zwei der zerfallenden Kegelschnitte in E und zwei der Grundpunkte, die der Geraden entsprechen. Der Punkt Γ_{12} bedeute die beiden zusammenfallenden Grundpunkte, und der zerfallende Kegelschnitt, der dem Berührungspunkt P zugeordnet ist, bestehe aus den beiden Geraden π_1, π_2.

[1]) Durège, K. 3. O., S. 178, Art. 311.

In einem solchen Punkt Γ_{12} berühren aber alle Kegelschnitte des Büschels einander und haben eine Tangente ϱ_1 gemeinsam, die mit der Verbindungsgeraden ϱ_2 der beiden andern Grundpunkte Γ_3 und Γ_4 den zweiten zerfallenden Kegelschnitt bildet. Dieser entspricht dann dem Schnittpunkt R von g mit der singulären Kurve. Γ_{12} liegt aber als Doppelpunkt des Kegelschnitts $(\pi_1 \pi_2)$ auf der Jakobischen Kurve, ebenso der Schnittpunkt P_{12} von ϱ_1 und ϱ_2. Dann sind π_1, π_2, ϱ_1, ϱ_2 Tangenten an die Cayleysche Kurve und ϱ_1 wird von π_1, π_2 harmonisch durch die Tangente τ getrennt, die die Jakobische Kurve in Γ_{12} besitzt[1]). Wir haben also gefunden:

dem Element (Pg) entsprechen
die Elemente $(\Gamma_{12}\pi_1)$, $(\Gamma_{12}\pi_2)$, $(\Gamma_3\pi_1)$, $(\Gamma_4\pi_2)$,
dem Element (Rg) entsprechen
die Elemente $(\Gamma_{12}\varrho_1)$, $(\Gamma_{12}\varrho_1)$, $(\Gamma_3\varrho_2)$, $(\Gamma_4\varrho_2)$,
und dem Element (Xg) entsprechen
die Elemente $(\Gamma_{12}\varrho_1)$, $(\Gamma_{12}\varrho_1)$, $(\Gamma_3\xi)$, $(\Gamma_4\xi)$.

Daraus würde sich das Resultat ergeben:

1. Das Element $(\Gamma_{12}\varrho_1)$ gehört allen Kegelschnitten des Büschels an, während es sonst immer nur einem Kegelschnitt eigen ist.

2. Es besteht eine Unstetigkeit zwischen den Elementen des Doppelpunktes Γ_{12}. Wir erhalten für alle durchgehenden Kegelschnitte des Büschels nur das Element $(\Gamma_{12}\varrho_1)$, allein bei dem zerfallenden Kegelschnitt $(\pi_1 \pi_2)$ springt es in zwei Elemente $(\Gamma_{12}\pi_1)$ und $(\Gamma_{12}\pi_2)$ über.

Hier liegt also eine Unbestimmtheit vor, die sich analytisch wie folgt ergibt.

Soll $\Omega = 0$ ein zerfallender Kegelschnitt sein, so muß (xy) auf der Singulären Kurve liegen, demnach der Gleichung $\Delta = 0$ genügen.

---

[1]) Durège, K. 3. O., S. 266, Art. 502.

Die Bedingungen für einen Doppelpunkt sind:

$$(17a)\qquad \begin{cases} x\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial\xi}+y\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial\xi}+\dfrac{\partial\varphi_3}{\partial\xi}=0 \\ x\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial\eta}+y\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial\eta}+\dfrac{\partial\varphi_3}{\partial\eta}=0 \\ x\varphi_{13}+y\varphi_{23}+\varphi_{33}=0, \end{cases}$$

wobei:

$$\varphi_{13}\equiv a_{13}\xi+a_{23}\eta+a_{33}$$

und entsprechend φ_{23} und φ_{33} ist. Bedeutet $P(x\,y)$ einen Punkt auf der Singulären Kurve, so gehört ihm eindeutig auf der Jakobischen Kurve ein Punkt $\xi_0|\eta_0$ zu, der Doppelpunkt von $\Omega=0$. Legen wir eine beliebige Gerade y' durch P, so geht der Kegelschnitt:

$$\varphi_1+y'\varphi_2=0$$

nicht durch $\xi_0|\eta_0$, sondern schneidet in $\Omega=0$ vier Punkte ein. Ist aber y' Tangente an die singuläre Kurve, so erfüllt sie die Bedingung:

$$(22)\qquad \frac{\partial\Delta}{\partial x}+y'\cdot\frac{\partial\Delta}{\partial y}=0.$$

Nun ist:

$$(23a)\quad \frac{\partial\Delta}{\partial x}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ (12) & (22) & (23) \\ (13) & (23) & (33) \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} (11) & (12) & (13) \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ (13) & (23) & (33) \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} (11) & (12) & (13) \\ (12) & (22) & (23) \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$(23b)\quad \frac{\partial\Delta}{\partial y}=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ (12) & 22 & (23) \\ (13) & 23 & (33) \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} (11) & (12) & (13) \\ b_{12} & b_{22} & b_{23} \\ (13) & (23) & 33 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} (11) & (12) & (13) \\ (12) & (22) & (23) \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{vmatrix}.$$

Aus je zwei der Bedingungsgleichungen (17a) für den Doppelpunkt $\xi_0|\eta_0$ folgt:

$$(24)\quad \xi_0:\eta_0:1=\begin{Vmatrix} (11) & (12) & (13) \\ (12) & (22) & (23) \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} (12) & (22) & (23) \\ (13) & (23) & (33) \end{Vmatrix}=\begin{vmatrix} (13) & (23) & (33) \\ (11) & (12) & (13) \end{vmatrix}$$

also ergibt sich aus der zweiten Matrix:

$$\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi}\right)_0=a_{11}\xi_0+a_{12}\eta_0+a_{13}=\begin{vmatrix} (12) & (22) \\ (13) & (23) \end{vmatrix}^{-1}\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ (12) & (22) & (23) \\ (13) & (23) & (33) \end{vmatrix},$$

aus der dritten Matrix:

$$\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta}\right)_0 = a_{12}\xi_0 + a_{22}\eta_0 + a_{23} = \begin{vmatrix} (13) & (23) \\ (11) & (12) \end{vmatrix}^{-1} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ (13) & (23) & (33) \\ (11) & (12) & (13) \end{vmatrix}$$

und aus der ersten Matrix:

$$(\varphi_{13})_0 = a_{13}\xi_0 + a_{23}\eta_0 + a_{33} = \begin{vmatrix} (11) & (12) \\ (12) & (22) \end{vmatrix}^{-1} \cdot \begin{vmatrix} a_{13} & a_{23} & a_{33} \\ (11) & (12) & (13) \\ (12) & (22) & (23) \end{vmatrix}.$$

Ebenso wird gebildet:

$$\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi}\right)_0, \quad \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial \eta}\right)_0, \quad (\varphi_{23})_0.$$

Setzen wir diese Ausdrücke für die Determinanten von $\frac{\partial \Delta}{\partial x}$ ein, so wird:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial x} = \begin{vmatrix} (12) & (22) \\ (13) & (23) \end{vmatrix} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi}\right)_0 + \begin{vmatrix} (13) & (23) \\ (11) & (12) \end{vmatrix} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta}\right)_0 + \begin{vmatrix} (11) & (12) \\ (12) & (22) \end{vmatrix} (\varphi_{13})_0$$

und infolge Gleichung (24) ergibt sich:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial x} = \begin{vmatrix} (11) & (12) \\ (12) & (22) \end{vmatrix} \left\{ \xi_0 \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi}\right)_0 + \eta_0 \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta}\right)_0 + (\varphi_{13})_0 \right\}$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial x} = \begin{vmatrix} (11) & (12) \\ (12) & (22) \end{vmatrix} \cdot \varphi_1(\xi_0 | \eta_0).$$

Analog folgt:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial y} = \begin{vmatrix} (11) & (12) \\ (12) & (22) \end{vmatrix} \cdot \varphi_2(\xi_0 | \eta_0),$$

also ist:

$$(25) \qquad \frac{\partial \Delta}{\partial x} + y' \frac{\partial \Delta}{\partial y} = \varphi_1(\xi_0 | \eta_0) + y' \cdot \varphi_2(\xi_0 | \eta_0) = 0.$$

Demnach gilt:

Der Kegelschnitt $\varphi_1 + y' \cdot \varphi_2 = 0$ jetzt auch durch $\xi_0 | \eta_0$, während sich die zu $\xi_0 | \eta_0$ gehörigen Elemente unter denen, die dem Element x, y, y' zugeordnet sind, aus der dritten Lieschen Bedingungsgleichung bestimmen.

$$\left(\frac{\partial \Omega}{\partial \xi}\right)_0 + \eta' \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \eta}\right)_0 \equiv \left(x \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi} + y \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial \xi}\right)_0$$

$$+ \eta' \left(x \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta} + y \frac{\partial \varphi_2}{\partial \eta} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial \eta}\right)_0 = 0.$$

Diese Gleichung wird für $\xi_0|\eta_0$ identisch Null, da die Klammerausdrücke Doppelpunktsbedingungen sind, folglich sind die Elemente η' unbestimmt, d. h. also:

„Dem Berührungselement eines Punktes der Singulären Kurve entsprechen unendlich viele Linienelemente eines Punktes $\xi_0|\eta_0$ auf der Jakobischen Kurve."

Wir können zusammenfassend sagen:

„Die Singuläre Kurve bildet wirklich eine Singularität. Ihren Berührungselementen entspricht:

1. die Gesamtheit aller Elementvereine, deren Punkte auf der Jakobischen Kurve liegen und

2. die Gesamtheit der Linienelemente $(\Gamma_3\pi_1)$ und $(\Gamma_4\pi_2)$. Diese sind außerdem Berührungselemente der Cayleyschen Kurve[1]). Die Cayleysche Kurve berührt also jeden zerfallenden Kegelschnitt $(\pi_1\pi_2)$ in den zwei Grundpunkten Γ_3 und Γ_4 des Büschels, die nicht auf der Jakobischen Kurve liegen."

Natürlich wird auch der zerfallende Kegelschnitt $(\varrho_1\varrho_2)$ in diesem Sinne zu den Kegelschnitten $(\pi_1\pi_2)$ gehören, nur sind dann die Berührungspunkte Grundpunkte eines andern Büschels.

Umgekehrt entspricht der Gesamtheit der Linienelemente, deren Punkt $\xi_0|\eta_0$ auf der Jakobischen Kurve liegt, auf der Singulären Kurve nur ein einziges Linienelement und zwar das Berührungselement.

Da nämlich für einen Punkt $\xi_0|\eta_0$ die Gleichungen (17a) gelten, so werden die Lieschen Gleichungen (1) und (2) für die Werte der Singulären und Jakobischen Kurve befriedigt. Dabei ist noch zu beachten, daß die erste Gleichung von (2) erfüllt wird, ohne daß wir über η' irgend eine Voraussetzung gemacht haben. Es ist nun:

$$y'_0 = -\frac{\varphi_1(\xi_0\ \eta_0)}{\varphi_2(\xi_0|\eta_0)}$$

also völlig unabhängig von η'. Weil aber $x_0|y_0$ die Gleichung $\Delta = 0$ erfüllt und auch noch:

$$\frac{\varphi_1(\xi_0|\eta_0)}{\varphi_2(\xi_0,\eta_0)} = \frac{\partial\Delta}{\partial x} : \frac{\partial\Delta}{\partial y}$$

[1]) Durège, K. 3, O., S. 266, Art. 503.

ist, so folgt, daß $x_0|y_0$ auf der Singulären Kurve liegt und y_0' die zugehörige Tangente ist. Eine Ausnahme bildet aber auch hier wieder der Fall, daß $\xi_0|\eta_0\,\eta_0'$ das Berührungselement der Jakobischen Kurve ist.

Daß in diesen Fällen die Definition der Berührungstransformation versagt, läßt sich noch aus zwei weiteren Kriterien von Lie erkennen.

1. Mit $\Omega = 0$ darf bekanntlich die Determinante D nicht verschwinden. Es war aber:

$$J^3 \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \eta} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial \eta} \\ \varphi_{13} & \varphi_{23} & \varphi_{33} \end{vmatrix} = \frac{1}{\xi_3^3} \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_3} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi_3} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial \xi_3} \end{vmatrix}.$$

Multiplizieren wir nun die erste bez. zweite und dritte Reihe mit ξ_1 bez. ξ_2 und ξ_3 und addieren dann zu jedem Glied der dritten Reihe das erste und zweite Glied der betreffenden Kolonne, so folgt:

$$(26) \quad J^3 \equiv \frac{1}{\xi_3^4} \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial \xi_2} \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \eta} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial \eta} \\ \varphi_1(\xi|\eta) & \varphi_2(\xi|\eta) & \varphi_3(\xi|\eta) \end{vmatrix}.$$

Daher ist vermöge Gleichung (19):

$$(27) \qquad D \equiv J^3,$$

und das ist für die Punkte der Singulären und Jakobischen Kurve Null. Wir haben also keine eigentliche Berührungstransformation vor uns.

2. In der notwendigen Beziehung[1]):

$$(28) \qquad \varrho = -\frac{\frac{\partial \Omega}{\partial y}}{\frac{\partial \Omega}{\partial \eta}} = \frac{-\varphi_2}{x \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta} + y \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial \eta} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial \eta}}$$

[1]) Lie, Ber. Transform., S. 44f., 52.

ist $\varrho = \infty$ für $x|y$, wenn dieses der Gleichung $\Delta = 0$ genügt. Also ist: $dy = y' dx$ und ebenso $d\eta = \eta' d\xi$.

Wir haben demnach zwei vollständige Differentiale, es muß y' eine Funktion von x allein sein. Also sind die Gleichungen (1) und (2) von Lie nicht nach x, y, y' auflösbar und die Bedingung der Berührungstransformation nicht erfüllt.

Ebenso sind diese Gleichungen nicht nach ξ, η, η' auflösbar, wenn ξ, η auf der Jakobischen Kurve liegt.

Wie verhalten sich die Kegelschnittbüschel, die einer Tangente an die Singuläre Kurve entsprechen, wenn das Netz Fundamentalpunkte besitzt?

Die Verwandtschaft sei eindreideutig und der Fundamentalpunkt Γ_4. Berührt dann eine Gerade g die Singuläre Kurve, so fallen wieder zwei Grundpunkte auf der Jakobischen Kurve in Γ_{12} zusammen. $\varrho_2 \pi_2$ schneiden sich in Γ_4 und $\varrho_1 \pi_1$ sind Tangenten an die Kurve zweiter Klasse, die zusammen mit dem Punkt Γ_4 die Cayleysche Kurve bildet. π_1 berührt dabei im Grundpunkte Γ_3 des Büschels die Kurve zweiter Klasse. Es gilt demnach:

„Die eine Gerade jedes zerfallenden Kegelschnittes des Netzes ist Tangente an die Kurve zweiter Klasse, die mit dem Fundamentalpunkt die Cayleysche Kurve bildet, während die andere Gerade durch den Fundamentalpunkt geht."

Liegt ein Netz mit zwei Fundamentalpunkten vor, so zerfällt die Singuläre Kurve in eine Gerade s und einen Kegelschnitt s^2, während die Jakobische Kurve aus der gemeinsamen Sehne σ und einem Kegelschnitt σ^2 bestand. Dem Schnittpunkt der beiden Geraden s und g entspricht ein Kegelschnitt, dessen Doppelpunkt auf der gemeinsamen Sehne liegt; den Schnittpunkten von g mit s^2 sind Geradenpaare zugeordnet, deren Doppelpunkte auf dem Kegelschnitt σ^2 liegen. Berührt aber g den Kegelschnitt s^2, so erhalten wir ein Büschel, das durch die beiden Fundamentalpunkte geht, während die beiden zusammenfallenden Grundpunkte auf dem Kegelschnitt σ^2 liegen. Die Berührungstangente des Büschels bildet mit der Sehne σ den Kegelschnitt, der dem Schnittpunkt von g mit s entspricht.

Bei drei Fundamentalpunkten müßte eine Tangente mit einer der drei Geraden, in die die Singuläre Kurve zerfällt. zusammenfallen. Dieser Fall bietet kein weiteres Interesse.

Nun bleibt noch die Möglichkeit, daß eine Gerade g Wende- oder Doppelpunktstangente der Singulären Kurve ist, also keine weiteren Schnittpunkte mit ihr gemein hat. Dann kann das entsprechende Büschel auch nur einen zerfallenden Kegelschnitt besitzen, und da wir den Fall, daß das Netz eine Doppelgerade enthält, zunächst noch ausgeschlossen haben, so müssen die Kegelschnitte dieses Büschels einander dreipunktig

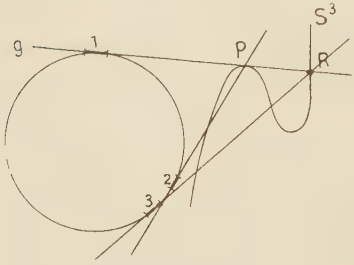

Fig. 2a.

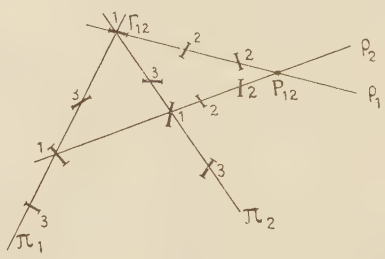

Fig. 2b.

berühren. Ausgenommen bleibt hierbei der Fall, daß die Gerade g gleichzeitig einen Teil der Singulären Kurve bildet.

Es mag noch für die wichtigsten Fälle kurz gezeigt werden, wie sich aus dem Vorangehenden ohne Rechnung ergibt, welche Stellung die zerfallenden Kegelschnitte zur Kurve vierter Ordnung einnehmen.

Schneidet die Tangente g an einen Kegelschnitt in $\mathfrak{E}$ in einem Netz ohne Fundamentalpunkte dreimal die Singuläre Kurve, so folgt ohne weiteres aus dem Früheren, daß die den Schnittpunkten zugeordneten zerfallenden Kegelschnitte die Kurve vierter Ordnung in acht Punkten schneiden, da sie Büscheln mit acht verschiedenen Grundpunkten gemeinsam sind.

Ist g aber zugleich Tangente im Punkt P an die Singuläre Kurve, so berührt ϱ_1 in Γ_{12} die Kegelschnitte des Büschels und hat nur noch die zwei Punkte mit ihr gemein, die vom Berührungskegelschnitt (2) in ϱ_1 eingeschnitten werden, während

π_1, π_2 je viermal die Kurve vierter Ordnung schneiden müssen (s. Fig. 2a, b). Also ist ϱ_1 Tangente in Γ_{12} an die Kurve vierter Ordnung[1]). Ähnlich ist es bei der Wendetangente.

Bei Netzen mit Fundamentalpunkten kann noch der besondere Fall auftreten, daß g Doppelpunktstangente ist. Das entsprechende Büschel besteht aus dem zerfallenden Kegelschnitt $(\pi_1 \pi_2)$ und einander in Γ_{12} dreipunktig berührenden Kegelschnitten, deren gemeinsame Tangente π_1 ist. Die zweite Tangente vom Doppelpunkt der Singulären Kurve an den Kegelschnitt schneidet die Singuläre Kurve noch in einem

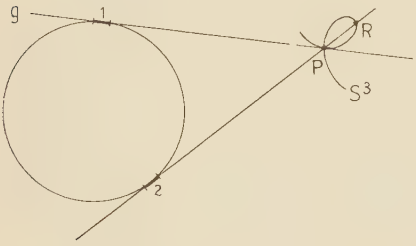

Fig. 3a.

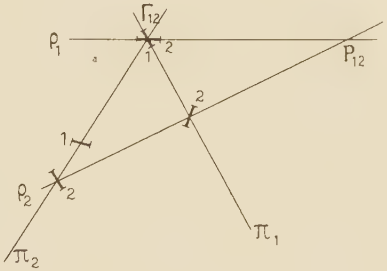

Fig. 3b.

Punkt R. Da aber alle Kegelschnitte des Netzes π_1 in Γ_{12} schneiden, so kann der Berührungskegelschnitt (2) π_1 nur noch in einem andern Punkt treffen. Also muß π_1 im Doppelpunkt drei Punkte mit der Kurve vierter Ordnung gemein haben, d. h. π_1 ist Doppelpunktstangente der Kurve vierter Ordnung (s. Fig. 3a, b).

7.

Eine Sonderstellung nehmen die Kegelschnittnetze mit einer bis drei Doppelgeraden ein. Bei einem Büschel, das eine Doppelgerade enthält, kann man zwei Fälle unterscheiden. Es besitzt vier Grundpunkte, von denen

a) immer zwei zusammenfallen, sodaß das Büschel außer der Doppelgeraden noch einen zerfallenden Kegelschnitt besitzt;

[1]) Zur Erklärung der Figuren: Der Kreis bezeichnet schematisch einen beliebigen Kegelschnitt. In Fig. 2b sind nur die Berührungselemente der drei Berührungskegelschnitte angegeben, die den Punkten 1, 2, 3 zugeordnet sind. Ebenso ist es in Fig. 3a, b und weiterhin.

b) alle vier zusammenfallen. Die Doppelgerade ist der einzige zerfallende Kegelschnitt des Büschels.

Im folgenden wollen wir die Gleichung eines Netzes sofort unter Berücksichtigung eines Kegelschnittes in $\mathfrak{S}$ aufstellen; denn dadurch werden die allgemeinen Eigenschaften der Singulären, Jakobischen und Cayleyschen Kurve nicht beeinflußt.

I. Das Netz besitze eine Doppelgerade, und

a) die zwei Büschel, denen sie angehört, haben noch einen zweiten zerfallenden Kegelschnitt.

Wir wählen die beiden Geraden $x_1 = 0$, $x_3 = 0$, denen die Büschel mit der Doppelgeraden entsprechen, als Träger der projektiven Punktreihen, die einen Kegelschnitt in $\mathfrak{S}$ erzeugen. Dem Punkt $x_1 = x_3 = 0$ ist demnach die Doppelgerade zugeordnet. $x_2 = 0$ verbindet die beiden Punkte, in denen $x_1 = 0$ und $x_3 = 0$ die erzeugte Kurve zweiter Klasse berühren. Dann sind $\varphi_1 = 0$, $\varphi_3 = 0$ zwei Berührungskegelschnitte, $\varphi_2 = 0$ die den beiden Büscheln gemeinsame Doppelgerade. Wir machen diese zur einen Seite $\xi_1 = 0$ des Koordinatendreiecks; $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = 0$ sind zwei Gerade, die zu den zerfallenden Kegelschnitten der beiden Büschel gehören. Die Netzgleichung lautet schließlich:

$$x_1(a_{11}\xi_1^2 + a_{33}\xi_3^2 + 2a_{13}\xi_1\xi_3 + 2a_{23}\xi_2\xi_3) + x_2\xi_1^2 + x_3(c_{11}\xi_1^2 + c_{22}\xi_2^2 + 2c_{12}\xi_1\xi_2 + 2c_{23}\xi_2\xi_3) = 0.$$

Bilden wir die Gleichung für $\Delta = 0$, so ergibt sich, daß die Singuläre Kurve in $x_1 = x_3 = 0$ einen Doppelpunkt besitzt. Die Jakobische Kurve dagegen besitzt zwei Doppelpunkte; sie zerfällt in die Doppelgerade und einen Kegelschnitt, wobei die Doppelgerade den Kegelschnitt schneidet. Die Zuordnung der Punkte zwischen beiden Kurven ist so, daß jedem Punkt der Singulären Kurve eindeutig ein Punkt auf dem Kegelschnitt der Jakobischen Kurve zugehört. Eine Ausnahme bildet nur der Doppelpunkt der Singulären Kurve, diesem entsprechen alle Punkte der Doppelgeraden, unter denen die Doppelpunkte der Jakobischen Kurve noch eine ausgezeichnete Stellung einnehmen. Umgekehrt ist jedem Punkt der Doppelgeraden der Doppelpunkt der Singulären Kurve zugeordnet.

Die Cayleysche Kurve ist eine Kurve dritter Klasse und hat die Doppelgerade als Doppeltangente[1]).

Als Gleichung der Kurve vierter Ordnung erhalten wir nun:

$$\varphi_1 \cdot \varphi_3 - \varphi_2^2 = 0.$$

Diese wird in vier Punkten von der Doppelgeraden geschnitten, wie es sein muß, da auf ihr vier Grundpunkte von zwei Büscheln liegen, während die andern beiden zerfallenden Kegelschnitte dieser Büschel die Kurve vierter Ordnung berühren müssen.

Besitzt das Netz einen Fundamentalpunkt, der mit dem Doppelpunkt der Singulären Kurve zusammenfällt, also etwa $c_{22} = 0$, so hat die Singuläre Kurve einen Rückkehrpunkt $x_1 = x_3 = 0$. Die Jakobische Kurve besteht noch immer aus einem Kegelschnitt und der Doppelgeraden, diese berührt aber jetzt den Kegelschnitt. Die Cayleysche Kurve dagegen zerfällt in den Fundamentalpunkt und einen Kegelschnitt.

Bei zwei Fundamentalpunkten, also $c_{22} = 0$, $a_{33} = 0$, besteht die Singuläre Kurve aus einem Kegelschnitt und einer sie berührenden Geraden, die Jakobische Kurve aus drei Geraden und die Cayleysche Kurve aus zwei Fundamentalpunkten und einem dritten Punkt. Die Kurve vierter Ordnung besitzt in diesen Fällen einen bez. zwei Doppelpunkte. Die Doppelpunktstangenten sind die beiden zerfallenden Kegelschnitte der zwei Grundbüschel.

b) Die Kegelschnitte haben in einem der beiden Grundbüschel eine vierpunktige Berührung mit der Doppelgeraden.

Es sei g diejenige Gerade, der dieses Büschel mit den vierpunktig berührenden Kegelschnitten entspricht; sie geht also durch den Doppelpunkt der Singulären Kurve. Da das Büschel keine weiteren Geradenpaare besitzt, so darf g keine weiteren Schnittpunkte mit der Singulären Kurve haben, sie muß infolgedessen Doppelpunktstangente sein. Wir haben somit gefunden:

[1]) Gundelfinger, Vorl. S. 388.

„Entspricht einem Doppelpunkt der Singulären Kurve eine Doppelgerade, so ist einer Doppelpunktstangente ein Büschel mit sich vierpunktig berührenden Kegelschnitten zugeordnet.“

Die zweite Tangente aus dem Doppelpunkt an den Kegelschnitt in $\mathfrak{S}$ hat noch einen Schnittpunkt mit der Singulären Kurve, dem der Kegelschnitt $(\varrho_1\, \varrho_2)$ zugeordnet ist (Fig. 4a, b). Demnach wird die Kurve vierter Ordnung in diesem vierfachen Grundpunkt von der Doppelgeraden berührt und in den zwei Grundpunkten des andern Büschels geschnitten. Haben beide Grundbüschel mit der Doppelgeraden eine vierpunktige Berührung, so wird die Doppelgerade zur Doppeltangente an die

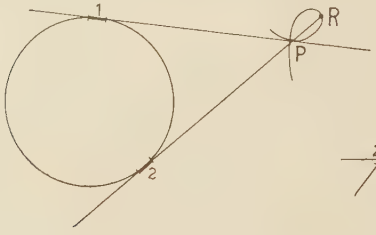

Fig. 4a.

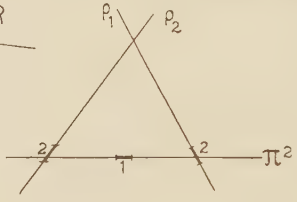

Fig. 4b.

Kurve vierter Ordnung, ohne aber dabei zu den Berührungskegelschnitten zu zählen.

II. Das Netz habe zwei Doppelgerade, und $x_1 = 0$, $x_3 = 0$ seien wieder die Träger der projektierten Punktreihen. Auf ihnen liegen zwei beliebige Punkte, denen die Doppelgeraden $\xi_1^2 = 0$, $\xi_3^2 = 0$ entsprechen. $x_2 = 0$ ist die Verbindungsgerade zwischen beiden Punkten; sie wird i. a. keine Tangente an den erzeugten Kegelschnitt sein. Dann gilt die Netzgleichung:

$$x_1\, \xi_3^2 + x_2 (b_{22}\, \xi_2^2 + 2\, b_{12}\, \xi_1\, \xi_2 + 2\, b_{13}\, \xi_1\, \xi_3 + 2\, b_{23}\, \xi_2\, \xi_3) + x_3\, \xi_1^2 = 0.$$

$\xi_3^2 = 0$ und $\xi_1^2 = 0$ sind jetzt keine Berührungskegelschnitte. Die Singuläre Kurve zerfällt in einen Kegelschnitt und die Gerade $x_2 = 0$. Die Jakobische Kurve besteht aus den beiden Doppelgeraden und einer dritten Geraden und die Cayleysche Kurve aus dem Schnittpunkt der beiden Doppelgeraden und einer Kurve zweiter Klasse.

Für den Fall, daß eines oder beide Grundbüschel aus vierpunktig berührenden Kegelschnitten bestehen, berühren $x_1 = 0$ bez. $x_3 = 0$ oder beide den Kegelschnitt, der zur Singulären Kurve gehört, in seinen Schnittpunkten mit $x_2 = 0$.

III. Besitzt das Netz drei Doppelgerade, so machen wir diese zu Seiten des Koordinatendreiecks und können dann die Netzgleichung in der Form aufstellen:

$$x_1 \xi_1^2 + x_2 \xi_2^2 + x_3 \xi_3^2 = 0.$$

Das Koordinatendreieck ist somit zugleich ein gemeinsames Polardreieck für alle Netzkegelschnitte. Die Singuläre Kurve besteht aus den drei Seiten des Koordinatendreiecks $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, die Jakobische Kurve aus den drei Doppelgeraden und die Cayleysche Kurve aus den Eckpunkten des Polardreiecks.

Büschel mit vierpunktig berührenden Kegelschnitten sind hier nicht möglich, ohne daß das Büschel entartet. Denn in diesem Fall müßte eine Doppelpunktstangente mit einer Seite der Singulären Kurve zusammenfallen und den erzeugten Kegelschnitt berühren. Zu dem entsprechenden Büschel würden zwei Doppelgerade gehören, und es würde aus lauter zerfallenden Kegelschnitten bestehen.

Im Anschluß hieran seien noch zwei Fälle angeführt, wo die Netze nur aus zerfallenden Kegelschnitten bestehen.

1. Alle Kegelschnitte mögen einen Strahl $\xi_3 = 0$ gemein haben, dann können wir ansetzen:

$$x_1 \xi_1 \xi_3 + x_2 \xi_2 \xi_3 + x_3 \xi_3^2 = 0\ ^1).$$

Daraus läßt sich $\xi_3 = 0$ absondern und es bleibt nur eine Gleichung erster Ordnung in ξ zurück; wir erhalten eine Korrelation. Daß wir es aber noch immer mit einem Netz zu tun haben, zeigt die Matrix (7), deren Minoren alle bis auf

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

verschwinden. Die Verwandtschaft ist also nicht entartet.

[1]) Hahn, Untersuchung der Kegelschnittnetze, deren Jakobische Form . . .; Math. Annalen 15 (1879), S. 119.

Die Gleichungen für die Singuläre und Cayleysche Kurve[1]) verschwinden identisch, während für die Jakobische Kurve $\xi_3^3 = 0$ gilt. Die Punkte x, denen zerfallende Kegelschnitte entsprechen, erfüllen demnach die ganze Ebene $\mathfrak{E}$.

2. Wir nehmen ein Strahlenbüschel an und ordnen jedem Strahl ∞^1 Strahlen des Büschels zu, dann erhalten wir ∞^1 Strahlenbüschel, die einen gemeinsamen Scheitel besitzen. Die Netzgleichung wird lauten:

$$x_1 \xi_1 \xi_2 + x_2 (a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2)(b_1 \xi_1 + b_2 \xi_2) + x_3 (a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2)(c_1 \xi_1 + c_1 \xi_2) = 0.$$

Hier werden die Gleichungen der Singulären und Jakobischen Kurve identisch Null; die Cayleysche Kurve ist der allen Büscheln gemeinsame Punkt $\xi_1 = \xi_2 = 0$.

Verschwinden sowohl die Gleichungen für die Jakobische wie für die Cayleysche Kurve identisch, so haben wir es nicht mehr mit einem eigentlichen Netz, sondern mit einem Kegelschnittbüschel zu tun[2]).

Das Resultat dieses Abschnittes aber können wir dahin ausdrücken:

„Besitzt ein Netz eine bis drei Doppelgerade, so bilden diese stets einen Teil der Jakobischen Kurve, während die Singuläre Kurve 1—3 Doppelpunkte hat."

8.

Aus den Ergebnissen des Abschnittes 6 läßt sich jetzt auch der geometrische Grund für die Involution vierter und niederer Ordnung auf einem Kegelschnitt erkennen[3]).

Drehen wir nämlich eine Gerade g um einen beliebigen Punkt P in $\mathfrak{S}$, so wird sie bei einem Netz ohne Fundamentalpunkte und Doppelgerade die Singuläre Kurve als Kurve sechster Klasse sechsmal berühren. Bei den Punktquadrupeln, die diesen sechs Lagen der Geraden g entsprechen, fallen aber

[1]) Hahn, Untersuchung der Kegelschnittnetze, deren Jakobische Form . . .; Math. Annalen 15 (1879), S. 119.

[2]) Ebenda S. 121.

[3]) Vergl. S. 9.

immer zwei Punkte zusammen, während der dritte und vierte getrennt bleibt. Die zusammenfallenden Punkte sind die sechs Doppel- oder Koinzidenzpunkte der Involution vierter Ordnung. Denn alle diese Punktquadrupel liegen auf dem Kegelschnitt, der dem Punkt P entspricht und die sechs Koinzidenzpunkte als Doppelpunkte von zerfallenden Kegelschnitten außerdem noch auf der Jakobischen Kurve. Wir haben also gefunden:

„Schneidet ein Kegelschnitt, der dem Punkt P in $\mathfrak{E}$ entspricht, die Jakobische Kurve in sechs Punkten, so sind diese die Doppelpunkte einer Involution vierter Ordnung auf dem Kegelschnitt. Die sechs Geraden, denen wir diese Punkte zuordnen können, sind die Tangenten von P an die Singuläre Kurve."

In ähnlicher Weise läßt sich der Satz für die Involution dritter und vierter Ordnung aussprechen. Der Kegelschnitt muß dann nur noch durch die Fundamentalpunkte des Netzes gehen.

Ebensowenig verliert der Satz seine Gültigkeit, wenn das Netz eine Doppelgerade enthält. In diesem Fall besitzt die Singuläre Kurve einen Doppelpunkt. Wir können also von einem beliebigen Punkt P aus nur vier eigentliche Tangenten an sie legen. Außerdem wird aber noch eine Gerade durch den Doppelpunkt gehen. Den vier Tangenten entsprechen vier Koinzidenzpunkte, der Geraden durch den Doppelpunkt aber zwei. Der dem Punkt P zugeordnete Kegelschnitt hat somit wirklich sechs Koinzidenzen. Dasselbe gilt für zwei und drei Doppelgerade.

Weiter können wir unmittelbar hieraus den Satz ableiten:

„Hat das Netz eine Doppelgerade, so liegen von allen Kegelschnitten des Netzes zwei Koinzidenzen auf einer einzigen Geraden, der Doppelgeraden. Bei zwei und drei Doppelgeraden liegen vier bez. alle sechs Koinzidenzen auf den zwei bez. drei Doppelgeraden."

Nach Cremona[1]) gilt aber noch folgender Satz:

„Liegen sechs Punkte der Jakobischen Kurve auf einem Kegelschnitt, so liegen ihre sechs konjugierten Pole gleichfalls auf einem Kegelschnitt."

[1]) Cremona, Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane, 1862, art. 137a.

Daraus ergibt sich dann:

„Legt man von einem beliebigen Punkt P die Tangenten an die Singuläre Kurve, so liegen ihre Berührungspunkte auf einem Kegelschnitt. Die entsprechenden zu diesen Berührungspunkten liegen ebenfalls auf einem Kegelschnitt, der dem Punkt P zugeordnet ist."

Bei Netzen mit Doppelgeraden ist das so zu erklären, daß der Kegelschnitt die vier bez. zwei Berührungspunkte in $\mathfrak{S}$ verbindet und außerdem noch durch die Doppelpunkte der Singulären Kurve geht.

g sei eine Gerade, der ein Kegelschnittbüschel des Netzes ohne Fundamentalpunkte und Doppelgerade entspricht. Sie schneidet die sechs von einem beliebigen Punkt P an die Singuläre Kurve gehenden Tangenten. Ein Kegelschnitt, der einem solchen Schnittpunkt zugehört, wird den dem Punkt P entsprechenden Kegelschnitt π^2 in einem Schnittpunkt von π^2 mit der Singulären Kurve berühren müssen, da beide Kegelschnitte zum Büschel gehören, das der Tangente zugeordnet ist, und das Resultat lautet:

„In einem Kegelschnittbüschel gibt es i. a. sechs Kegelschnitte, die so zusammengehören, daß sie einen gegebenen Kegelschnitt in seinen sechs Schnittpunkten mit der Jakobischen Kurve berühren."

Eine Gerade γ in E hat drei Schnittpunkte mit der Jakobischen Kurve, denen drei Tangenten an die Singuläre Kurve zugehören, da allen Linienelementen eines Punktes der Jakobischen Kurve das Berührungselement des zugeordneten Punktes der Singulären Kurve entspricht. Der der Geraden γ entsprechende Kegelschnitt berührt demnach die Singuläre Kurve in diesen drei Punkten.

Von einem Punkte P der Singulären Kurve können wir i. a. vier Tangenten an diese legen. P entspricht ein zerfallender Kegelschnitt $(\pi_1 \pi_2)$. Nach den obigen Sätzen können wir dann sagen:

„Die vier Schnittpunkte des Kegelschnitts $(\pi_1 \pi_2)$ mit der Jakobischen Kurve sind die Doppelpunkte von vier zerfallenden

Kegelschnitten, die den Berührungspunkten der Tangenten aus P an die Singuläre Kurve entsprechen". (Fig. 5a, b.)

Ist nun umgekehrt eine Gerade $\gamma \equiv \pi_1$ in E Teil eines zerfallenden Netzkegelschnitts, so werden den beiden Schnittpunkten π_1, π_2, von denen keiner der Doppelpunkt dieses Kegelschnitts ist, zwei Tangenten g_1, g_2 an die Singuläre Kurve zugeordnet sein, die sich aber, wie wir eben sahen, im dritten Punkt P schneiden müssen. Da g_1 und g_2 Tangenten an den Kegelschnitt sein sollen, der der Geraden π_1 entspricht und drei Punkte mit der Singulären Kurve gemein hat, so muß $(g_1 g_2)$ selbst dieser Kegel-

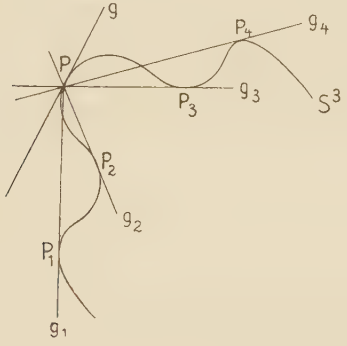

Fig. 5a.

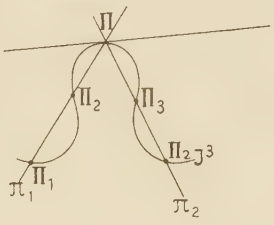

Fig. 5b.

schnitt sein. Das Element $(\Pi\pi_1)$ bildet also eine Ausnahme; denn ihm entspricht kein Berührungselement der Singulären Kurve, sondern statt dessen zwei Elemente (Pg_1) und (Pg_2). Ähnliches wird für $(\Pi\pi_2)$ gelten.

„Einer Geraden in E, die selbst Teil eines zerfallenden Netzkegelschnitts $(\pi_1\pi_2)$ ist, entspricht wieder ein zerfallender Kegelschnitt in $\mathfrak{E}$, dessen Doppelpunkt auf der Singulären Kurve liegt und der Punkt ist, dem der Kegelschnitt $(\pi_1\pi_2)$ zugehört, und dessen beide Geraden g_1, g_2 Tangenten an die Singuläre Kurve sind."

Berührt γ die Jakobische Kurve, so fallen zwei Berührungspunkte des entsprechenden Kegelschnitts mit der Singulären Kurve zusammen. Der Kegelschnitt wird also die Singuläre Kurve einmal vierpunktig und einmal zweipunktig berühren.

Ist γ aber Wendetangente, so haben wir nur noch eine einzige sechspunktige Berührung.

Besitzt das Netz eine Doppelgerade, so hat die Singuläre Kurve einen Doppelpunkt, und die Jakobische Kurve besteht aus der Doppelgeraden σ und dem Kegelschnitt σ^2. Den zwei Schnittpunkten von γ mit σ^2 gehören zwei Tangenten an die Singuläre Kurve zu. Dem Schnittpunkt von γ mit σ aber entspricht eine Gerade durch den Doppelpunkt der Singulären Kurve. Also geht auch der der Geraden γ zugeordnete Kegelschnitt durch den Doppelpunkt und berührt die Singuläre Kurve außerdem noch in zwei Punkten. Das heißt allgemein:

„Die allen Geraden in E entsprechenden Kegelschnitte in $\mathfrak{E}$ bilden ein System durch den Doppelpunkt der Singulären Kurve gehender Kegelschnitte, wenn diesem eine Doppelgerade zugeordnet ist."

Bei Netzen mit zwei und drei Doppelgeraden gehen die den Geraden zugehörigen Kegelschnitte durch die zwei bez. drei Doppelpunkte der Singulären Kurve.

Eine Gerade γ, die die Jakobische Kurve in einem Doppelpunkt schneidet, der ein Fundamentalpunkt des Netzes ist, kann stets als Teil eines zerfallenden Kegelschnitts angesehen werden. Da dem Doppelpunkt der Jakobischen Kurve derjenige der Singulären Kurve eindeutig entspricht, so muß der γ zugeordnete zerfallende Kegelschnitt durch den Doppelpunkt der Singulären Kurve gehen und kann außerdem nur noch einen Punkt mit ihr gemein haben. Der Kegelschnitt muß demnach eine Doppelgerade sein.

Einer Geraden dagegen, die durch einen der Doppelpunkte der Jakobischen Kurve bei einem Netz mit Doppelgeraden geht, ist i. a. ein wirklicher Kegelschnitt zugeordnet, der im Doppelpunkt der Singulären Kurve vier Punkte mit dieser gemein hat und die Singuläre Kurve noch in einem andern Punkt berührt.

Aus diesen Ergebnissen geht hervor, daß wir die Singuläre und Jakobische Kurve auch im Sinne der Korrespondenztheorie deuten können. Dann ist die Singuläre Kurve die Übergangs-

oder Grenzkurve, die Jakobische Kurve die Doppelkurve. Im Falle eines Netzes mit Doppelgeraden heißen die Doppelpunkte der Singulären Kurve auch Fundamentalpunkte von $\mathfrak{S}$. Die ihnen entsprechenden Doppelgeraden sind die Fundamentalkurven. Diese bilden mit der Doppelkurve zusammen (im Fall einer Doppelgeraden ist das ein Kegelschnitt) die Jakobische Kurve[1]).

9.

Ein Netz ohne Fundamentalpunkte und Doppelgerade liege vor. Die Gerade π und die Kurve dritter Ordnung π^3 mögen die zerfallende Kurve vierter Ordnung bilden, wobei π die Kurve π^3 in drei Punkten Π, P, Σ schneidet. In den Schnittpunkten gehören immer zwei Linienelemente zur Kurve vierter Ordnung, z. B. im Punkt Π die Elemente $(\Pi\pi)$ und $(\Pi\pi^3)$. Dann gibt es drei Möglichkeiten.

1. Die beiden Elemente gehören zwei verschiedenen Berührungskegelschnitten an. Wir haben aber die Kurve vierter Ordnung so definiert, daß sie in jedem Punkt bloß von einem Kegelschnitt des Netzes berührt wird, der nur einem Büschel angehört und in diesem der einzige Berührungskegelschnitt ist. Dieser Fall ist mithin ausgeschlossen.

2. π und das Element $(\Pi\pi^3)$ gehören einem zerfallenden Kegelschnitt an. Dann müßten aber auch π und die Elemente $(P\pi^3)$ und $(\Sigma\pi^3)$ einem zerfallenden Kegelschnitt angehören, wobei die Gerade π allen drei Kegelschnitten gemeinsam wäre. Das ist nach unserer Voraussetzung und Definition gleichfalls unmöglich.

3. Es bleibt nur die Möglichkeit, daß wir es hier mit singulären Punkten zu tun haben, daß diese also zur Jakobischen Kurve gehören. Demnach gilt der Satz:

„Die Schnittpunkte der Geraden π mit der Kurve dritter Ordnung π^3 liegen auf der Jakobischen Kurve, wenn π und π^3 zusammen eine Kurve vierter Ordnung bilden."

[1]) Enzyklopädie III, C. 4, S. 438ff.

Ist das aber der Fall, so müssen beide Linienelemente einem und demselben Berührungselement der Singulären Kurve entsprechen. Diese muß demnach den Kegelschnitt, dem die zerfallende Kurve vierter Ordnung zugehört, in den drei Punkten derjenigen Elemente berühren, die den Elementen von II, P, Σ zugeordnet sind. Unter welchen Bedingungen zerfällt dann aber die Kurve vierter Ordnung in eine Gerade und eine Kurve dritter Ordnung, falls die Singuläre Kurve den Kegelschnitt in drei Punkten berührt? Ist das immer oder nur unter bestimmten Voraussetzungen der Fall?

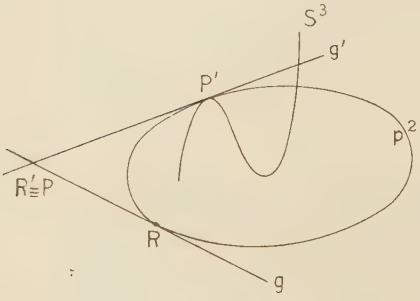

Fig. 6a.

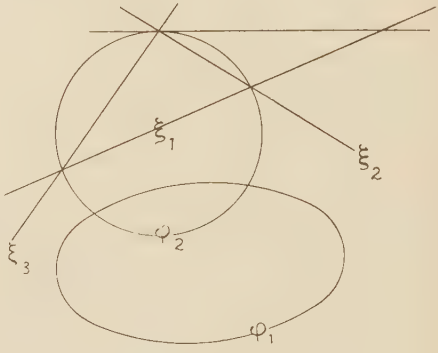

Fig. 6b.

Wir wollen zunächst untersuchen, was geschieht, wenn die Singuläre Kurve den Kegelschnitt p^2 in einem Punkte berührt. Die Kurve vierter Ordnung denken wir uns wieder projektiv erzeugt, nehmen aber jetzt an, daß die eine Gerade PP' in $\mathfrak{S}$ als Träger der projektiven Punktreihen zugleich eine Tangente der Singulären Kurve im Berührungspunkt P' mit dem Kegelschnitt p^2 sei. Dann haben wir in E zwei projektiv aufeinander bezogene Kegelschnittbüschel, und da die Gerade PP' Tangente an die Singuläre Kurve ist, so muß das entsprechende Büschel zwei zusammenfallende Grundpunkte haben. Der dem Punkt $P = R'$ zugehörige Kegelschnitt φ_2 ist beiden Büscheln gemeinsam (Fig. 6a, b). φ_1 sei der P' und φ_3 der R zugeordnete Kegelschnitt. Da P' ein Punkt der Singulären Kurve ist, so ist φ_1 ein zerfallender Kegelschnitt und sein

Doppelpunkt muß auf der Jakobischen Kurve und der Kurve vierter Ordnung liegen. Dieser Kegelschnitt bilde zwei Seiten $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = 0$ des Koordinatendreiecks und die Verbindungslinie seiner Schnittpunkte mit φ_2 sei die dritte Seite $\xi_1 = 0$. Die Gleichungen der drei Kegelschnitte sind dann:

$$\varphi_1 = \xi_2\,\xi_3 = 0$$
$$\varphi_2 \equiv b_{12}\,\xi_1\,\xi_2 + b_{13}\,\xi_1\,\xi_3 + b_{23}\,\xi_2\,\xi_3 = 0$$
$$\varphi_3 \equiv c_{11}\,\xi_1^2 + c_{22}\,\xi_2^2 + c_{33}\,\xi_3^2 + 2\,c_{12}\,\xi_1\,\xi_2 + 2\,c_{13}\,\xi_1\,\xi_3 + 2\,c_{23}\,\xi_2\,\xi_3 = 0$$

und die Gleichung der Kurve vierter Ordnung lautet:

$$\xi_2 \cdot \xi_3 \cdot \varphi_3(\xi|\xi) - (b_{12}\,\xi_1\,\xi_2 + b_{13}\,\xi_1\,\xi_3 + b_{23}\,\xi_2\,\xi_3)^2 = 0.$$

Diese Kurve hat im Punkte $\xi_2 = \xi_3 = 0$ einen Doppelpunkt. Dasselbe ließe sich auch für zwei und drei Berührungen mit der Singulären Kurve nachweisen. Die Kurve vierter Ordnung hätte dann zwei bez. drei Doppelpunkte. Diese wollen wir „Doppelpunkte zweiter Art“ nennen. Es gilt also:

„Berührt die Singuläre Kurve einen Kegelschnitt in einem Punkt, so besitzt die entsprechende Kurve vierter Ordnung einen Doppelpunkt zweiter Art.“

Nach Hesse[1]) gilt nun der Satz:

„Alle Kegelschnitte, die eine Kurve dritter Ordnung in drei verschiedenen Punkten berühren, ordnen sich drei Systemen unter. Nimmt man nämlich zu den drei Berührungspunkten die konjugierten Pole in einem System, so bilden diese in zweien wieder die Berührungspunkte eines Kegelschnitts. Im dritten System aber liegen sie in einer Geraden.“

Wie wir früher bemerkt haben, können wir die Punkte der Jakobischen Kurve als konjugiert zu denen der Singulären Kurve ansehen. Daraus folgt schließlich der Satz:

„Berührt die Singuläre Kurve einen Kegelschnitt in drei Punkten derart, daß die zu den Berührungspunkten konjugierten Punkte der Jakobischen Kurve auf einer Geraden liegen, so liegen auch die Doppelpunkte der Kurve vierter Ordnung in einer Geraden. Die Kurve vierter Ordnung muß in diese Gerade und eine Kurve dritter Ordnung zerfallen.“

[1] Hesse, Ges. Werke, S. 179ff.; Durège, K. 3. O., S. 281, Art. 541.

Ein Beispiel für ein solches System bilden diejenigen Kegelschnitte, die den Geraden in E entsprechen und die Singuläre Kurve in drei Punkten berühren.

10.

Mittels dieser Ergebnisse lassen sich Kombinationen von Doppelpunkten erster und zweiter Art bilden, die für die Kurven vierter Ordnung von Wichtigkeit sind. Einige davon sollen im folgenden noch behandelt werden.

I. Ein Kegelschnitt p_1^2 hat i. a. sechs Schnittpunkte mit der Singulären Kurve gemein. Diesen Punkten entsprechen

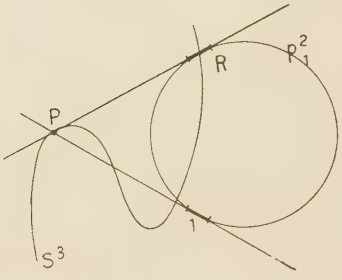

Fig. 7a.

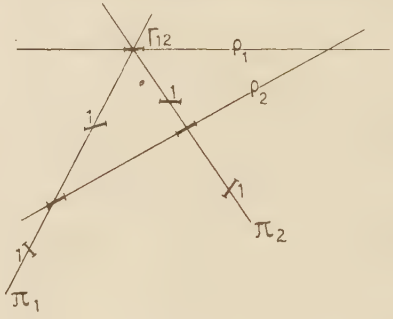

Fig. 7b.

sechs zerfallende Kegelschnitte, die vier Elemente mit der Kurve vierter Ordnung gemeinsam haben müssen, was nur so geschehen kann, daß sie Doppeltangenten sind. Wir haben danach gefunden:

„In jeder Kegelschnittreihe, die die Kurve vierter Ordnung berührt, sind sechs zerfallende Kegelschnitte derart enthalten, daß sie sechs Paare von Doppeltangenten an die Kurve vierter Ordnung bilden."

Ist die Tangente von p_1^2 in einem Schnittpunkt R der Singulären Kurve mit p_1^2 auch noch Tangente an die Singuläre Kurve in einem Punkt P, so entspricht dem Punkt R der Berührungskegelschnitt $(\varrho_1\, \varrho_2)$ und ϱ_1 berührt die Kurve vierter Ordnung im Punkt Γ_{12} vierpunktig; Γ_{12} ist ein „Undulationspunkt" der Kurve vierter Ordnung (Fig. 7a, b).

Das Verhalten einer Kurve vierter Ordnung bei einfacher Berührung des Kegelschnitts mit der Singulären Kurve ohne Doppelpunkte haben wir schon behandelt. Ist der Berührungspunkt ein Wendepunkt, so können wir folgende Gleichung der Kurve vierter Ordnung aufstellen:

$$\xi_2\,\xi_3\cdot\varphi_3(\xi|\xi)-(b_{33}\,\xi_3^2+2\,b_{12}\,\xi_1\,\xi_2+2\,b_{23}\,\xi_2\,\xi_3)^2=0.$$

$\xi_2=0$ ist Tangente der dreipunktig berührenden Kegelschnitte des Büschels, das der Tangente im Wendepunkt entspricht und bildet mit $\xi_3=0$ den einzigen zerfallenden Kegelschnitt dieses Büschels. $\xi_2=0$ wird Doppelpunkttangente der Kurve vierter Ordnung und berührt diese vierpunktig, d. h. die Kurve besitzt im Doppelpunkt einen Wendepunkt.

Im allgemeinen lassen sich aber die Wendepunkte der Kurve vierter Ordnung mit Hilfe der Berührungstransformation nicht bestimmen, da ein Berührungselement einer Geraden immer mit zwei Punkten der Kurve identisch ist, die Wendetangente aber drei Punkte mit ihr gemein hat. Nur die Doppelpunkte machen eine Ausnahme; in diesen können wir eine dreipunktige Berührung des zerfallenden Kegelschnitts erhalten.

Hat das Netz einen Fundamentalpunkt, und berührt eine Gerade aus dem Doppelpunkt der Singulären Kurve den Kegelschnitt in einem Punkt, der zugleich Schnittpunkt mit der Singulären Kurve ist, so hat der zerfallende Kegelschnitt im Doppelpunkt der Kurve vierter Ordnung eine vierpunktige Berührung mit ihr. Also besitzt die Kurve vierter Ordnung einen einfachen Inflexionsknoten[1]). Hat die zweite Tangente aus dem Doppelpunkt der Singulären Kurve an den Kegelschnitt dieselbe Eigenschaft, so besitzt die Kurve vierter Ordnung einen zweifachen Inflexionsknoten.

Geht der Kegelschnitt durch den Doppelpunkt der Singulären Kurve, so fällt in der Kurve vierter Ordnung ein Doppelpunkt erster und zweiter Art zusammen. Sie besitzt eine Spitze. Der Tangente im Doppelpunkt an den Kegelschnitt entspricht

[1]) Da sich dieselben oder ähnliche Schlüsse immer wiederholen, so können wir uns hier und zumeist auch im folgenden auf die bloße Wiedergabe des Resultates beschränken.

ein Büschel mit zwei zerfallenden Kegelschnitten. Der eine, das Doppelpunkttangentenpaar der Jakobischen Kurve, ist Berührungskegelschnitt, und der Teil des andern, der durch den Fundamentalpunkt geht, wird Rückkehrtangente. Die Gleichung einer solchen Kurve vierter Ordnung lautet:

$$\xi_2\xi_3\cdot(c_{22}\xi_2^2+c_{33}\xi_3^2+2c_{12}\xi_1\xi_2+2c_{13}\xi_1\xi_3+2c_{23}\xi_2\xi_3)$$
$$-4\xi_1^2(b_{12}\xi_2+b_{13}\xi_3)^2=0.$$

$\xi_2\cdot\xi_3=0$ bedeutet den einen zerfallenden Kegelschnitt, und $b_{12}\xi_2-b_{13}\xi_3=0$, ein Teil des zweiten, ist die Rückkehrtangente.

Hat der Kegelschnitt aber im Doppelpunkt der Singulären Kurve die Doppelpunktstangente mit ihr gemein, so besitzt das entsprechende Büschel nur einen zerfallenden Kegelschnitt, dessen eine Gerade im Doppelpunkt der Kurve vierter Ordnung vier Punkte mit dieser gemein hat und die einzige Tangente in ihm ist. Da zwei Doppelpunkte zusammenfallen, so haben wir es mit einem „Berührungsknoten“ zu tun. Stellen wir die Gleichung der Kurve in der Form auf:

$$\xi_2\xi_3(c_{12}\xi_1\xi_2-c_{13}\xi_1\xi_3-c_{23}\xi_2\xi_3)$$
$$-(b_{22}\xi_2^2-b_{33}\xi_3^2-2b_{12}\xi_1\xi_2+2b_{23}\xi_2\xi_3)^2=0,$$

so läßt sich das Resultat auch analytisch nachweisen, indem wir z. B. $\xi_1=0$ als unendlich ferne Gerade und $\frac{\xi_2}{\xi_1}, \frac{\xi_3}{\xi_1}$ als kartesische Koordinaten auffassen.

Berührt der Kegelschnitt bei zwei oder drei Fundamentalpunkten die Gerade, die einen Teil der Singulären Kurve bildet, so fällt der entsprechende Doppelpunkt auf die Verbindungsgerade der beiden Fundamentalpunkte. Es liegen also drei Doppelpunkte der Kurve vierter Ordnung auf einer Geraden, und jene muß daher in die Gerade und eine Kurve dritter Ordnung zerfallen.

II. Das Netz besitze Doppelgerade aber keine Fundamentalpunkte.

a) Soll die Doppelgerade selbst ein Berührungskegelschnitt sein, so geht der Kegelschnitt in $\mathfrak{S}$ durch den Doppelpunkt der Singulären Kurve. Die Gleichung der Kurve vierter Ordnung lautet in diesem Fall:

$$\xi_2^2\cdot\varphi_3(\xi\ \xi)-\xi_1^2\xi_3^2=0.$$

$\xi_2^2 = 0$ ist die Doppelgerade und $\xi_1 \cdot \xi_3 = 0$ der andere zerfallende Kegelschnitt des Büschels. $\xi_1 = \xi_2 = 0$ und $\xi_2 = \xi_3 = 0$ sind Doppelpunkte, wobei $\xi_2 = 0$ deren Verbindungsgerade ist. Die Doppelgerade und der zweite zerfallende Kegelschnitt bestimmen demnach die beiden Doppelpunkte der Kurve vierter Ordnung. Daraus folgt der Satz:

„Eine Doppelgerade bestimmt als Berührungskegelschnitt zwei Doppelpunkte der Kurve vierter Ordnung."

Infolgedessen hätte eine Kurve vierter Ordnung, wenn zwei Doppelgerade Berührungskegelschnitte sind, vier Doppelpunkte. Da immer nur je zwei von diesen in einer Geraden liegen, so zerfällt die Kurve in zwei Kegelschnitte. Bei drei Doppelgeraden als Berührungskegelschnitten wird die Kurve vierter Ordnung in vier Gerade zerfallen.

b) Der Kegelschnitt berühre im Doppelpunkt eine Doppelpunktstangente der Singulären Kurve. Dann berührt die Doppelgerade die Kurve vierter Ordnung vierpunktig und ist die einzige Tangente des Doppelpunktes. Da aber zwei Doppelpunkte zweiter Art in diesem Punkte vereinigt liegen, so hat die Kurve vierter Ordnung hier einen Berührungsknoten.

Das Netz besitze zwei Doppelgerade, die aber keine Berührungskegelschnitte sind. Die Gerade, die einen Teil der Singulären Kurve bildet, sei Tangente an den Kegelschnitt in $\mathfrak{E}$. Das entsprechende Büschel hat zwei Doppelgerade und besteht aus lauter zerfallenden Kegelschnitten mit einem gemeinsamen vierfachen Grundpunkt. Der dem Berührungspunkt entsprechende zerfallende Kegelschnitt bildet die Doppelpunktstangenten der Kurve vierter Ordnung. Außerdem haben wir hier einen zweifachen Inflexionsknoten, da die Tangenten vierpunktig berühren.

Sind aber die beiden Doppelgeraden selbst Berührungskegelschnitte und die Tangenten in den beiden Doppelpunkten der Singulären Kurve zugleich in diesen Punkten Tangenten an den erzeugten Kegelschnitt, so müßte die Kurve vierter Ordnung zwei Berührungsknoten besitzen. Sie muß also in zwei einander berührende Kegelschnitte zerfallen.

Bei drei Doppelgeraden kann der Kegelschnitt 1—3 Seiten der Singulären Kurve berühren, und je nachdem wird die Kurve vierter Ordnung 1—3 zweifache Inflexionsknoten besitzen.

III. Es sollen zu gleicher Zeit Doppelgerade und Fundamentalpunkte in einem Netz auftreten. Die beiden Doppelpunkte der Singulären Kurve mögen zusammenfallen, sodaß diese einen Rückkehrpunkt hat. Geht der Kegelschnitt durch diesen hindurch, so besitzt die Kurve vierter Ordnung einen Doppel- und einen Rückkehrpunkt. Die Rückkehrtangente bildet der Teil des zweiten Kegelschnitts im Büschel mit der Doppelgeraden, der durch den Fundamentalpunkt geht.

Zerfällt die Singuläre Kurve in einen Kegelschnitt und eine sie berührende Gerade, so gibt es im Netz zwei Fundamentalpunkte und eine Doppelgerade. Dem durch den Berührungspunkt gehenden Kegelschnitt entspricht dann eine Kurve vierter Ordnung mit zwei Rückkehrpunkten. Der zerfallende Kegelschnitt, der in das Büschel mit der Doppelgeraden gehört, bildet die beiden Rückkehrtangenten.

Berührt aber der Kegelschnitt die Rückkehrtangente der Singulären Kurve im Spitzpunkt, so besteht das Kegelbüschel mit der Doppelgeraden aus vierpunktig sich berührenden Kegelschnitten, und die Gleichung der Kurve vierter Ordnung lautet:

$$2\,\xi_2^2(c_{12}\xi_1\xi_2+c_{13}\xi_1\xi_3+c_{23}\xi_2\xi_3)-(b_{33}\xi_3^2+2\,b_{12}\xi_1\xi_2+2\,b_{23}\xi_2\xi_3)^2=0.$$

Dann bestehen zwei Möglichkeiten. Der singuläre Punkt $\xi_2=\xi_3=0$ kann Oskulationsknoten sein, indem man annimmt, daß drei Doppelpunkte zusammengefallen sind, oder er ist eine Schnabelspitze; denn es fallen eine Spitze, entsprechend dem Doppelpunkt erster und zweiter Art, und ein Doppelpunkt zusammen. Wie wir später beweisen werden, besitzt aber die Kurve vierter Ordnung noch drei Doppeltangenten. Aus diesem Grunde muß der singuläre Punkt eine Schnabelspitze sein.

11.

Einem Kegelschnitt p_1^2 entspricht eine Kurve vierter Ordnung und einer Tangente an diese ein Kegelschnitt p_2^2, der den p_1^2

in einem Punkt berühren muß. Mit der Tangente aber wird noch eine Kurve dritter Ordnung verbunden sein, die gleichfalls p_2^2 zugeordnet ist und folglich die Kurve vierter Ordnung in drei Punkten berührt, die mit den Tangenten der Kurve vierter Ordnung verbunden als Kurven vierter Ordnung anzusehen sind. Da dem gemeinsamen Berührungselement der beiden Kegelschnitte p_1^2 und p_2^2 vier Elemente in den Grundpunkten eines Büschels entsprechen, so müssen die vier Berührungspunkte dieser zerfallenden Kurven vierter Ordnung die Grundpunkte des Büschels sein. Demnach werden die acht Berührungspunkte zweier solcher Kurven vierter Ordnung immer auf einem Netzkegelschnitt liegen.

Hat das Netz einen Fundamentalpunkt, so berühren die Kurven dritter Ordnung nur noch in zwei Punkten die Kurve vierter Ordnung und haben alle im Fundamentalpunkt einen Doppelpunkt. Bei zwei Fundamentalpunkten müssen sie demnach in eine allen gemeinsame Gerade, die die beiden Doppelpunkte verbindet, und ∞^1 Kegelschnitte zerfallen. Bei drei Fundamentalpunkten bestehen die Kurven dritter Ordnung aus den drei Verbindungsgeraden der Fundamentalpunkte.

Besitzt die Kurve vierter Ordnung nur Doppelpunkte zweiter Art, so gehört zu ihren Tangenten immer ein System von Kurven dritter Ordnung, die in drei Punkten berühren.

Wir sahen oben, daß sechs Schnittpunkten eines Kegelschnitts mit der Singulären Kurve sechs Paar Doppeltangenten an die Kurve vierter Ordnung entsprechen. Diese bilden dann eine Steinersche Gruppe[1]). Die acht Berührungspunkte von je zwei Paaren dieser Doppeltangenten werden wieder auf einem Kegelschnitt $\varphi = 0$ liegen. Demnach können wir auch zwei Paar dieser Doppeltangenten und $\varphi = 0$ benützen, um die Gleichung der Kurve vierter Ordnung aufzustellen. Diese wird also lauten:

$$x \cdot y \cdot z \cdot t - \varphi^2 = 0,$$

wenn $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $t = 0$ die Gleichungen der vier Doppeltangenten sind.

[1] Encycl., III C_5, S. 528.

Nun besitzt eine Kurve vierter Ordnung ohne Singularitäten 28 Doppeltangenten. Davon gehören also stets sechs Paar als zerfallende Kegelschnitte zu einem System von Berührungskegelschnitten. Diesen kann aber keine Kurve dritter Ordnung von der bisherigen Art zugeordnet werden, sonst müßte sie die andere Doppeltangente des Paares ebenfalls zur Doppeltangente haben, und das ist unmöglich.

Es bleiben aber noch 16 Doppeltangenten, die nicht zu dieser Kegelschnittreihe gehören. Ihren Berührungspunkten mit der Kurve vierter Ordnung gehören dann zwei getrennte Linienelemente an p_1^2 zu, und der Doppeltangente entspricht ein Kegelschnitt, der p_1^2 in zwei Punkten berührt. Entsprechend diesen beiden Berührungspunkten muß es noch sechs weitere Linienelemente in E geben, die auf einer mit der Doppeltangente verbundenen Kurve dritter Ordnung und auf der Kurve vierter Ordnung liegen. Folglich erhalten wir 16 Kurven dritter Ordnung, die die Kurven vierter Ordnung in sechs Punkten berühren. Diese gehören dann 16 von den 28 Systemen von Kurven dritter Ordnung an, die es nach Hesse[1]) gibt, welche eine gegebene Kurve vierter Ordnung in sechs Punkten berühren und durch je eine Doppeltangente festgelegt werden. Da aber die acht Berührungspunkte, die zu einer solchen Kurve dritter Ordnung und der mit ihr verbundenen Doppeltangente gehören, zwei Tangenten an p_1^2 entsprechen, so müssen sie auf einem Netzkegelschnitt liegen.

Bei einem Netz mit einem Fundamentalpunkte geht immer eine Gerade von jedem Paar der 12 Doppeltangenten, die zur Reihe der Berührungskegelschnitte gehören, durch den Doppelpunkt der Kurve vierter Ordnung. Diese sechs Geraden heißen dann uneigentliche Doppeltangenten und sind mit den sechs Tangenten aus dem Doppelpunkt an die Kurve vierter Ordnung identisch. Infolgedessen entsprechen den sechs Schnittpunkten eines Kegelschnitts mit der Singulären Kurve nur sechs eigentliche Doppeltangenten.

[1]) Hesse, Ges. Werke, S. 319, 345.

Die Singuläre Kurve zerfällt bei zwei Fundamentalpunkten in einen Kegelschnitt s^2 und eine Gerade s. Den vier Schnittpunkten eines Kegelschnitts mit s^2 entsprechen acht uneigentliche Doppeltangenten.

Den zwei Schnittpunkten mit s sind zwei Kegelschnitte zugeordnet, deren einer Teil die gemeinsame Sehne zwischen den Doppelpunkten ist. Die beiden anderen Geraden sind eigentliche Doppeltangenten.

Besitzt das Netz drei Fundamentalpunkte, so entsprechen den Schnittpunkten sechs uneigentliche Doppeltangenten. Die andern sechs Geraden fallen paarweise zusammen und bilden die drei Verbindungslinien der Doppelpunkte.

Hat die Kurve vierter Ordnung aber nur Doppelpunkte zweiter Art, so entsprechen den Schnittpunkten des Kegelschnitts mit der Singulären Kurve eigentliche, den Berührungspunkten uneigentliche Doppeltangenten. Die Spitzen dieser fallen in die Doppelpunkte der Kurve vierter Ordnung und berühren sie in zwei weiteren Punkten.

Von den zahlreichen Fällen, die sich durch Kombination von Doppelpunkten erster und zweiter Art ergeben, mögen nur zwei hervorgehoben werden, weil sie für das Frühere von Bedeutung sind.

Wir hatten den Fall behandelt[1]), daß das Netz keine Fundamentalpunkte aber eine Doppelgerade besitze und der Kegelschnitt die Singuläre Kurve in einer Doppelpunktstangente berühre. Den drei übrigen Schnittpunkten entsprechen dann sechs eigentliche Doppeltangenten, und das sind die einzigen, die die Kurve vierter Ordnung mit Berührungsknoten besitzt[2]).

Berührt der Kegelschnitt im Falle der Schnabelspitze[3]) die Rückkehrtangente der Singulären Kurve im singulären Punkt, so gibt es drei eigentliche Doppeltangenten und drei uneigentliche. Eine Kurve vierter Ordnung mit Oskulationsknoten darf außer

[1]) Vergl. S. 47.

[2]) Salmon-Fiedler, Höhere ebene Kurven, 1873, S. 262.

[3]) Vergl. S. 48.

der Tangente im singulären Punkt nur noch eine eigentliche Doppeltangente besitzen[1]).

An zwei Kegelschnitte, denen in E beliebige Kurven vierter Ordnung entsprechen, lassen sich vier gemeinsame Tangenten legen. Folglich müssen die einer solchen Geraden zugeordneten vier Punkte beiden Kurven vierter Ordnung gemeinsam und demnach Schnittpunkte sein. Wir können daher sagen:

„Den vier gemeinsamen Tangenten zweier Kegelschnitte in $\mathfrak{S}$ sind gerade die 16 Schnittpunkte der beiden entsprechenden Kurven vierter Ordnung zugehörig."

Für ein Netz mit 1 bis 3 Fundamentalpunkten werden es dagegen nur noch 12 bez. 8 und 4 Schnittpunkte sein, da die Doppelpunkte der einen Kurve vierter Ordnung auch Doppelpunkte der anderen sind.

Zerfallen die Kurven vierter Ordnung in eine Gerade und eine Kurve dritter Ordnung, so nimmt diejenige Tangente in $\mathfrak{S}$, von der ein entsprechender Punkt Schnittpunkt der beiden Geraden ist, die mit die beiden Kurven vierter Ordnung bilden, eine besondere Stellung ein; wir nennen sie die Haupttangente.

p_1^2 entspricht eine Kurve vierter Ordnung π_1^4. Deren Tangenten bilden mit einem System die Kurve vierter Ordnung in drei Punkten berührenden Kurven dritter Ordnung gleichfalls Kurven vierter Ordnung. Ihre Berührungspunkte liegen auf einem Berührungskegelschnitt; denn die Kegelschnitte, denen sie entsprechen, berühren p_1^2 in einem Punkt. Also haben sie noch zwei gemeinsame Tangenten mit ihm, die sich in einem Punkt P schneiden. Folglich müssen die acht zugeordneten Schnittpunkte auf dem Kegelschnitt liegen, der P entspricht.

Den 12 Tangenten an π_1^4 aus einem Punkt Γ_1 entsprechen 12 Kegelschnitte, die alle die Gerade g als Haupttangente berühren müssen. g sind aber außer dem Punkt Γ_1 noch drei andere Punkte zugeordnet, in denen sich die 12 Kurven dritter

[1]) Salmon, S. 263.

Ordnung schneiden, die mit den Tangenten zu Kurven vierter Ordnung verbunden sind. Analog ist es bei Kurven vierter Ordnung mit Singularitäten.

12.

Es mögen schließlich noch zwei Beispiele angeführt werden, die allgemeineres Interesse besitzen und auf die einzelne der gefundenen Resultate angewendet werden sollen.

I. Wir gehen aus von der Gleichung eines Kreisnetzes mit zwei Fundamentalpunkten:

$$(\xi-\alpha)^2+(\eta-\beta)^2-\varrho^2+\varkappa\,\xi+\lambda\,\eta=0$$

oder

$$\left(\xi-\frac{2\,\alpha+\varkappa}{2}\right)^2+\left(\eta-\frac{2\beta+\lambda}{2}\right)^2=\varrho^2-\alpha^2-\beta^2+\frac{(2\,\alpha+\varkappa)^2+(2\,\beta+\lambda)^2}{4}.$$

Setzen wir

$$\varkappa=-2\,\alpha,\quad \lambda=-2\,\beta,$$

so bedeutet

$$r^2=\varrho^2-\alpha^2-\beta^2=0$$

den Radius des Kreises um den Koordinatenursprung. Ist $r^2<0$, so kann es keine reellen Kreise geben. Wir nehmen daher $r^2>0$ an und setzen:

$$\frac{2\,\alpha+\varkappa}{2}=x,\quad \frac{2\beta+\lambda}{2}=y,$$

wobei wir beide Felder als zusammenfallend ansehen. Dann gilt:

$$2\,x\,\xi+2\,y\,\eta-(\xi^2+\eta^2-r^2)=0.$$

Die explizite Darstellung von x, y, y' und ξ, η, η' ergibt:

$$x=\frac{\eta'(\xi^2-\eta^2-r^2)-2\,\xi\,\eta}{2(\eta'\,\xi-\eta)};\quad \xi=-\frac{y'}{y'^2+1}\{(y-xy')\pm\sqrt{(y-xy')^2+r^2(y'^2+1)}\}$$

$$y=\frac{(\xi^2-\eta^2-r^2)+2\,\xi\,\eta\,\eta'}{2(\eta'\,\xi-\eta)};\quad \eta=\frac{1}{y'^2+1}\{(y-xy')+\sqrt{(y-xy')^2+r^2(y'^2+1)}\}$$

$$y'=-\frac{\xi}{\eta};\qquad \eta'=-\frac{(x+yy')\pm\sqrt{(y-xy')^2+r^2(y'^2+1)}}{y'(x+yy')\pm\sqrt{(y-xy')^2+r^2(y'^2+1)}}.$$

Die Liesche Bedingung D ist dann:

$$\xi^2+\eta^2+r^2\gtrless 0$$

und demnach ergibt:

$$\xi^2+\eta^2+r^2-0$$

verbunden mit der unendlich fernen Geraden durch die imaginären Kreispunkte die Jakobische Kurve, die hier mit der Singulären Kurve identisch ist, da das Netz keine Doppelgerade besitzt.

Jeder Punkt $(x\,y)$ ist der Mittelpunkt seines zugeordneten Kreises, der außerdem den Kreis:

$$\xi^2 + \eta^2 - r^2 = 0$$

diametral schneidet. Der Radius jedes Netzkreises ist:

$$\varrho^2 = x^2 + y^2 + r^2,$$

und daraus läßt sich ϱ leicht konstruieren, wenn $(x\,y)$ gegeben ist. Den Geraden entsprechen Kreisbüschel mit zwei reellen Grundpunkten. Jedes Büschel schneidet in $\xi = 0$ und $\eta = 0$ eine Involution ein. Da aber der Kreis $\xi^2 + \eta^2 - r^2 = 0$ diametral von jedem andern Kreis geschnitten wird, so müssen alle Kreise die ξ- und η-Achse schneiden. Demnach gibt es keine reellen Doppelpunkte der Involution, wir haben eine elliptische Involution vor uns.

Einem Mittelpunktskegelschnitt wird eine bizirkuläre Kurve vierter Ordnung entsprechen; denn die Kreispunkte müssen Doppelpunkte erster Art werden. Dem Kreis wird insbesondere, da er durch die Doppelpunkte der Singulären Kurve geht, eine Kurve vierter Ordnung mit Rückkehrpunkten zugeordnet sein. Es fallen dann zwei Doppelpunkte erster und zweiter Art zusammen. Eine Ausnahme bildet ein Kreis mit dem Koordinatenursprung als Mittelpunkt. Dieser berührt den Kreis, der zur Singulären Kurve gehört, in den Doppelpunkten, was eigentlich zwei Berührungsknoten der entsprechenden Kurve vierter Ordnung zur Folge haben müßte. Diese wird also in zwei konzentrische Kreise um den Koordinatenursprung zerfallen.

Eine Parabel berührt die unendlich ferne Gerade, die ein Teil der Singulären Kurve ist. Folglich liegen in der entsprechenden Kurve vierter Ordnung drei Doppelpunkte in einer Geraden, sie muß also aus dieser Geraden und einer zirkularen Kurve dritter Ordnung bestehen.

Liegt ein Kegelschnitt als gegeben vor, so ist die Kurve vierter Ordnung als Hüllkurve leicht zu konstruieren, da wir den Radius jedes Berührungskegelschnittes sofort angeben können. Wollen wir aber die zwei Berührungspunkte eines solchen mit der Kurve vierter Ordnung bestimmen, so brauchen wir nur die Tangenten in den betreffenden Punkt an den gegebenen Kegelschnitt zu legen und einen zweiten Kegelschnitt des entsprechenden Büschels zu zeichnen. Damit sind die beiden reellen Grundpunkte gefunden, die ja auf der Kurve vierter Ordnung liegen, und die Tangenten in ihnen an den Berührungskreis sind zugleich Tangenten der Kurve vierter Ordnung.

II. Als Gleichung eines Netzes mit drei Fundamentalpunkten hatten wir früher angegeben:

$$2\,x_1\xi_2\xi_3 + 2\,x_2\xi_1\xi_3 + x_3(c_{11}\xi_1^2 + 2\,c_{12}\xi_1\xi_2 + c_{22}\xi_2^2) = 0.$$

Wir wollen jetzt die beiden Felder zusammenfallend annehmen. Dann transformieren wir das Koordinatensystem x in das System ξ mit Hilfe der Transformationsgleichungen.

$$\varrho\, x_i = a_{1i}x'_1 + a_{2i}x'_2 + a_{3i}x'_3 = a_i(x') \quad i = 1, 2, 3.$$

Folglich gilt für das Netz:

$$2\,a_1(x')\xi_2\xi_3 + 2\,a_2(x')\cdot\xi_1\xi_3 + a_3(x')\cdot(c_{11}\xi^2 + 2\,c_{12}\xi_1\xi_2 + c_{22}\xi_2^2) = 0.$$

Die Punkte x' wollen wir nun so festsetzen, daß sie Pole in bezug auf die Kegelschnitte des Netzes sind. Dann folgt allgemein als Polarengleichung:

$$\begin{aligned} &2\,a_1(x')(x'_2\xi_3 + x'_3\xi_2) + 2\,a_2(x')\cdot(x'_1\xi_3 + x'^1_3\xi_1) \\ &+ a_3(x')\,[x'_1\xi_1 + c_{12}(x'_1\xi_2 + x'_2\xi_1) + c_{22}x'_2\xi_2] = 0. \end{aligned}$$

Soll $\xi_3 = 0$ die zugeordnete Polare sein, so gilt:

$$\begin{aligned} a_2(x') + a_3(x')\cdot(c_{11}x'_1 + c_{12}x'_2) &= 0 \\ a_1(x') + a_3(x')\cdot(c_{12}x'_1 + c_{22}x'_2) &= 0 \end{aligned}$$

und daraus ergibt sich:

$$\begin{aligned} a_1(x') : a_2(x') : a_3(x') &= \begin{vmatrix} 0 & x'_3 & c_{11}x'_1 + c_{12}x'_2 \\ x'_3 & 0 & c_{12}x'_1 + c_{22}x_2 \end{vmatrix} \\ &= c_{12}x'_1 + c_{22}x'_2 : c_{11}x'_1 + c_{12}x'_2 : -x'_3 \\ &= b_1(x') : b_2(x') : \quad x'_3. \end{aligned}$$

Die Netzgleichung lautet also:

$$2\,b_1(x')\cdot\xi_2\xi_3 + 2\,b_2(x')\cdot\xi_1\xi_3 - x_3'(c_{11}\xi_1^2 + 2\,c_{12}\xi_1\xi_2 + c_{22}\xi_2^2) = 0.$$

Demnach entspricht jedem Punkt X^1 ein Kegelschnitt, der durch die Fundamentalpunkte A, B, Γ geht, wobei $\xi_3 = 0$ die Polare von X^1 in bezug auf den Kegelschnitt ist. Dann gilt in Folge der gemachten Voraussetzungen:

$$(A\,y\,a\,x') = -1,$$

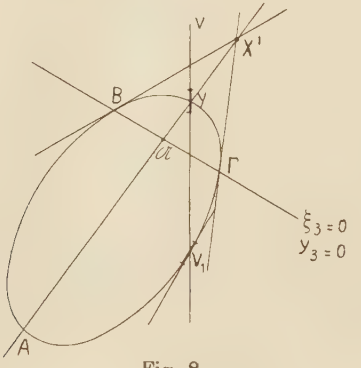

Fig. 8.

wo Y der Schnittpunkt der Geraden $A\,X^1$ mit dem Kegelschnitt und $\mathfrak{A}$ der mit der Geraden $B\,\Gamma$ ist. Daraus folgt:

$$(A\,\mathfrak{A}\,X'\,Y) = \frac{1}{2}$$

und das sagt aus, daß gilt:

$$\begin{cases} \varrho\,x_1' = y_1 \\ \varrho\,x_2' = y_2 \\ \varrho\,x_3' = 2\,y_3. \end{cases}$$

Somit haben wir eine Zentralkollineation mit der Charakteristik $\varkappa = \frac{1}{2}$ erhalten, und die Netzgleichung lautet schließlich:

$$b_1(y)\cdot\xi_2\cdot\xi_3 + b_2(y)\xi_1\xi_3 - y_3(c_{11}\xi_1^2 + 2\,c_{12}\xi_1\xi_2 + c_{22}\xi_2^2) = 0.$$

Dieses Ergebnis wollen wir als „projektiv erweiterte Fußpunkttransformation“ bezeichnen. Ziehen wir nämlich eine Gerade v durch Y, so geht das Linienelement $(Y\,v)$ in das Berührungselement an den Kegelschnitt im Punkte V_1 über (Fig. 8).

Ein spezieller Fall dieser erweiterten Fußpunkttransformation ist die gewöhnliche Fußpunkttransformation (Fig. 9). An Stelle des allgemeinen Kegelschnitts tritt ein Kreis. Als y_3-Achse wählen wir die unendlich ferne Gerade durch die beiden

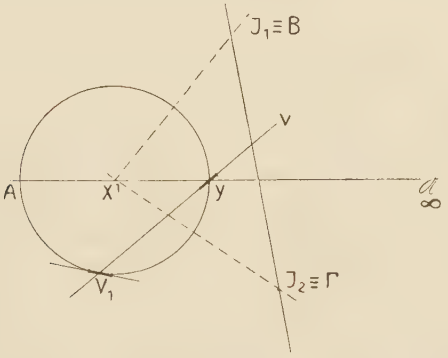

Fig. 9.

imaginären Kreispunkte J_1 und J_2, die jetzt zu Fundamentalpunkten werden. Der dritte Fundamentalpunkt ist der Koordinatenursprung A. Wir wählen hier rechtwinklige Kartesische Koordinaten. Der Pol der unendlich fernen Geraden ist der Kreismittelpunkt X^1. Nach diesen Voraussetzungen muß:

$$C_{12} = 0, \qquad C_{11} = C_{22}$$

werden. Da die Charakteristik der Zentralkollineation $\varkappa = \frac{1}{2}$ ist, und für die Koordinaten des Mittelpunktes X^1 gilt:

$$x' = \frac{x}{2}; \qquad y' = \frac{y}{2},$$

so muß die Netzgleichung schließlich lauten:

$$x\,\xi + y\,\eta - (\xi^2 + \eta^2) = 0,$$

und damit haben wir in der Tat die Gleichung der gewöhnlichen Fußpunktstransformation gefunden. Der beliebige Winkel $(A\,V_1\,Y)$ ist dabei in einen rechten übergegangen.

Die Liesche Bedingung D ist:

$$\xi^2 + \eta^2 \gtrless 0,$$

also stellt:

$$\xi^2 + \eta^2 = 0$$

mit der unendlich fernen Geraden die Jakobische Kurve dar, die wieder mit der Singulären Kurve identisch ist. Die Beziehungen zwischen x, y, y' und ξ, η, η' ergeben sich in der Form:

$$x = \frac{\eta'(\xi^2 - \eta^2) - 2\xi\eta}{\eta'\xi - \eta}; \qquad \xi = -y' \cdot \frac{y - xy'}{y'^2 + 1}$$

$$y = \frac{(\xi^2 - \eta^2) + 2\xi\eta\eta'}{\eta'\xi - \eta}; \qquad \eta = \frac{y - xy'}{y'^2 + 1}$$

$$y' = -\frac{\xi}{\eta}; \qquad \eta' = \frac{x(y'^2 - 1) - 2yy'}{y(y'^2 - 1) + 2xy'}.$$

Lassen wir Y auf einer Geraden laufen, so tut X^1 infolge der linearen Zuordnung dasselbe. Den Punkten der Geraden g wird dann ein Kreisbüschel mit den reellen Grundpunkten $A\Delta$ entsprechen. AY ist stets der Durchmesser des neuen Kreises, also muß dieser durch die drei reellen Punkte A, Δ, Y gehen, und das ist nur möglich, wenn $A\Delta$ senkrecht auf g steht. Der vierte Grundpunkt ist also immer der Fußpunkt des Lotes von A auf g.

Einem Kreis wird eine Kurve vierter Ordnung zugeordnet sein, das ist dann die Fußpunktkurve des Kreises. Diese muß in den zwei imaginären Kreispunkten Spitzen haben, da der zu ihr gehörige Kreis ebenfalls durch diese geht. Liegt auch A auf dem Kreis, so hat die Fußpunktkurve drei Rückkehrpunkte. Liegt A innerhalb des Kreises, so wird A ein isolierter Punkt der Kurve vierter Ordnung.

Ähnlich ist es bei den andern Mittelpunktskegelschnitten, deren entsprechende die rationalen bizirkularen Kurven vierter Ordnung sind. Eine Ausnahme bildet auch hier die Parabel, aus demselben Grund wie in Beispiel I. Ihre Fußpunktkurve ist eine rationale zirkulare Kurve dritter Ordnung und die unendlich ferne Gerade.

Ein Beispiel zur erweiterten Fußpunkttransformation liefert Scheffers[1]). Er geht aus von der Gleichung:

$$(y - \eta) - (x - \xi)\operatorname{tg} w = 0.$$

[1]) Scheffers, Beitr. z. Geom. d. Berührungstr. der Ebene. Leipz. Ber. 56, S. 105—116.

Das stellt eine Gerade g_0 in den laufenden Koordinaten $(x\,y)$ dar, die durch den Punkt $P(\xi|\eta)$ geht und ihm zugeordnet ist. Setzen wir nun z. B.:

$$\operatorname{tg} w = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{\xi}{\eta},$$

so läuft P auf einer Hyperbel:

$$\frac{x\,\xi}{a^2} - \frac{y\,\eta}{b^2} - \left(\frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2}\right) = 0.$$

Fassen wir auch noch $(x\,y)$ als veränderlich auf, so erhalten wir ein Netz von Hyperbeln, die alle durch den Koordinatenanfang gehen. Die drei Grundkegelschnitte haben drei gemeinsame Punkte: den Koordinatenursprung und zwei unendlich ferne Punkte. Es ergibt sich, daß die Asymptotenrichtung konstant ist:

$$\frac{\eta}{\xi} = \pm\frac{b}{a},$$

also unabhängig von der Wahl von $(x\,y)$. Da die Kollineationsachse unendlich fern liegt, so muß ihr Pol der Hyperbelmittelpunkt X^1 sein. Der Koordinatenursprung ist unser früherer Punkt A. Dann liegt der Punkt $Y(x, y)$ stets auf der ihm entsprechenden Hyperbel. Soll nun eine erweiterte Fußpunkttransformation vorliegen, so muß A, X^1, Y auf einer Geraden liegen und die Koordinaten von X^1 müssen sein:

$$x' = \frac{x}{2}, \qquad y' = \frac{y}{2}.$$

Dies ist in der Tat der Fall; denn es gilt:

$$x' = \frac{a^2 b^2 x}{2\,a^2 b^2} = \frac{x}{2}; \qquad y' = \frac{a^2 b^2 y}{2\,a^2 b^2} = \frac{y}{2}.$$

A, X', Y aber liegen auf einer Geraden, da die Determinante:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{x}{2} & \frac{y}{2} & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix}$$

identisch für alle $(x|y)$ verschwindet. In ähnlicher Weise ließe sich der Fall behandeln, wenn P auf einer Ellipse läuft.

Die Anregung zur vorliegenden Arbeit erhielt ich von Herrn Prof. Dr. W. Ludwig. Für das lebhafte Interesse und die liebenswürdige Unterstützung bei Abfassung der Arbeit spreche ich auch an dieser Stelle Herrn Prof. Ludwig meinen herzlichsten Dank aus.

Lebenslauf.

Ich, Edward Harry Wilson, wurde am 31. Dezember 1887 zu Zwickau i. Sa. geboren. Nach dem Besuch der höheren Bürgerschule und des Gymnasiums zu Zwickau, das ich Ostern 1908 mit dem Reifezeugnis verließ, wandte ich mich nach Dresden, um an der Kgl. Technischen Hochschule Mathematik und Physik zu studieren. Hier arbeitete ich hauptsächlich im Mathematischen Seminar des Herrn Prof. Dr. W. Ludwig. Ostern 1912 siedelte ich an die Universität Rostock über und bestand dort am 4. Dezember 1912 das Examen rigorosum.

Vorlesungen und Übungen besuchte ich bei den Herren Professoren Dember, Disteli, Elsenhans, Grübler, Gurlitt, Hallwachs, Helm, Hempel, Krause, Ludwig, Luther, Naetsch, Pattenhausen, Walzel, Wuttke in Dresden, Staude, Weber in Rostock.